Оглавление

Предисловие

Вниманию читателей предлагается годовой спецкурс, прочитанный для студентов и аспирантов различных московских вузов в рамках Научно-образовательного центра при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН в течение 2005/2006-го учебного года.

В спецкурсе излагаются различные аспекты теории случайных блужданий и теории ветвящихся процессов. При этом ядро курса составляют *условные принципы инвариантности* для случайных процессов, построенных на основе случайных последовательностей, коими являются и случайные блуждания, и рассматриваемые в курсе ветвящиеся процессы.

В связи с этим представляется необходимым познакомить читателя с теоремами об *условиях сходимости по распределению случайных процессов* с непрерывными траекториями или с траекториями без разрывов второго рода. Общие вопросы сходимости по распределению и указанные теоремы излагаются в первых трех лекциях.

Большое внимание в рассматриваемом курсе уделено *принципу инвариантности Прохорова–Донскера* и его приложениям (см. лекции 4–7). В частности, рассматриваются закон арксинуса и предельная теорема для совместного распределения минимума, максимума и положения в последний момент для случайного блуждания с нулевым сносом.

Наряду с принципом инвариантности Прохорова–Донскера в курсе рассматриваются так называемые условные принципы инвариантности для случайных блужданий. Этот раздел теории вероятностей зародился в семидесятые годы двадцатого столетия и активно развивается в настоящее время.

В лекциях 9–10 рассматривается *условный принцип инвариантности Лиггетта*, в котором накладывается ограничение на положение случайного блуждания в последний момент. В качестве приложения этого принципа инвариантности получается знаменитая предельная теорема Колмогорова для выборочной функции распределения.

В лекциях 11–13 и 17 излагается *условный принцип инвариантности Иглхарта*, в котором накладывается ограничение на всю траекторию случайного блуждания. При этом рассматриваются случайные блуждания как с нулевым сносом, так и с отрицательным. В качестве предельных процессов здесь фигурируют *броуновская экскурсия* и *броуновская извилина*.

Важное место в доказательстве упомянутых принципов инвариантности занимают локальные предельные теоремы: *теорема Стоуна*, изложенная в лекции 8, и *условная локальная предельная теорема*, изложенная в лекции 16.

В курсе излагаются и применяются *тождества Спарре–Андерсена* и *Спицера* (см. лекции 14–15), играющие значительную роль в теории случайных блужданий. Приведены прямые, вероятностные доказательства этих тождеств (без факторизационных теорем).

Ветвящимся процессам посвящены последние при лекции. Сначала рассматривается классический *ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона* и излагаются предельные теоремы Яглома, Феллера–Линдвалла, Ламперти–Нея–Дарретта. Затем рассматривается популярная в настоящее время модель *ветвящегося процесса в случайной среде* и излагаются предельные теоремы для этого процесса, часть которых получена в результате плодотворной совместной работы сотрудников отдела дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова и немецких математиков Г. Керстинга и Й. Гейгера. Важно подчеркнуть *взаимосвязь* ветвящихся процессов в случайной среде и условных случайных блужданий, благодаря которой различные части курса становятся единым целым.

Для понимания спецкурса необходимо знакомство с основами теории вероятностей, а также с элементами теорий восстановления, мартингалов, марковских процессов, например по книгам А. Н. Ширяева [9] (см. главы 2, 3, 7) и А. А. Боровкова [2] (см. главы 9, 12, 20). Изучение спецкурса позволит читателю перейти от классических разделов теории вероятностей к современным задачам этой науки.

Работа над спецкурсом была частично поддержана грантом РФФИ (проект № 05-01-00035) и грантом президента РФ для ведущих научных школ (проект № НШ-4129.2006.1). Автор выражает глубокую благодарность своей дочери А. В. Афанасьевой за большую помощь в компьютерном наборе текста и посвящает книгу своей жене Л. В. Афанасьевой.

Лекция 1
Сходимость случайных элементов по распределению

Сходимость по распределению является одним из важнейших понятий теории вероятностей и расматривается, как правило, во всех стандартных учебных курсах по этой дисциплине (вспомните закон больших чисел в форме Хинчина, центральную предельную теорему). В начале данной лекции приводятся необходимые для дальнейшего сведения об этой сходимости.

Пусть S – метрическое пространство, а $\mathfrak{B}(S)$ – его борелевская σ-алгебра, т.е. минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества S. Рассмотрим вероятностные меры $P, P_1, P_2, \ldots,$ заданные на измеримом пространстве $(S, \mathfrak{B}(S))$.

Определение 1.1. Говорят, что последовательность вероятностных мер $\{P_n\}$ *слабо сходится* к вероятностной мере P при $n \to \infty$, если для любой непрерывной ограниченной числовой функции f, заданной на S,

$$\int_S f dP_n \to \int_S f\, dP \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В следующей теореме А. Д. Александрова приводятся *условия слабой сходимости* (с доказательством можно ознакомиться по книгам [1], [3]).

Теорема 1.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность* $\{P_n\}$ *слабо сходится к* P *при* $n \to \infty$;

2) *для любого множества* $A \in \mathfrak{B}(S)$ *такого, что* $P(\partial A) = 0$ (∂A – *граница множества* A),

$$P_n(A) \to P(A) \quad \textit{при} \quad n \to \infty;$$

3) *для любого замкнутого множества* $F \in \mathfrak{B}(S)$

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leqslant P(F);$$

4) *для любого открытого множества* $G \in \mathfrak{B}(S)$

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geqslant P(G).$$

Пусть X – *случайный элемент*, отображающий некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ в измеримое пространство $(S, \mathfrak{B}(S))$ (это означает, что для любого множества $A \in \mathfrak{B}(S)$ множество $\{\omega\colon X(\omega) \in A\}$ принадлежит $\mathscr{F}$). Случайный элемент индуцирует меру P_X на $(S, \mathfrak{B}(S))$:

$$P_X(A) := \mathsf{P}(\{\omega\colon X(\omega) \in A\}).$$

Определение 1.2. Говорят, что последовательность случайных элементов $X_1, X_2, \ldots$ (определенных, вообще говоря, на разных вероятностных пространствах) со значениями в пространстве S *сходится по распределению* при $n \to \infty$ к случайному элементу X со значениями в пространстве S, если $\{P_{X_n}\}$ слабо сходится к P_X при $n \to \infty$. Эта сходимость обозначается так: $X_n \xrightarrow{D} X$.

Теорема 1.1 может быть переформулирована.

Теорема 1.1$'$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $X_n \xrightarrow{D} X$ *при* $n \to \infty$;

2) *для любой непрерывной ограниченной числовой функции* f, *заданной на* S,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}f(X_n) = \mathsf{E}f(X)$$

(*здесь символ* E *означает математическое ожидание, соответствующее мере* P);

3) *для любого множества* $A \in \mathfrak{B}(S)$ *такого, что* $P(\partial A) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in A) = \mathsf{P}(X \in A);$$

4) *для любого замкнутого множества* $F \in \mathfrak{B}(S)$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in F) \leqslant \mathsf{P}(X \in F);$$

5) *для любого открытого множества* $G \in \mathfrak{B}(S)$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in G) \geqslant \mathsf{P}(X \in G).$$

Замечание 1.1. Строго говоря, следует писать $\mathsf{P}_n(X_n \in A)$ и $\mathsf{E}_n f(X_n)$ вместо $\mathsf{P}(X_n \in A)$ и $\mathsf{E}f(X_n)$ соответственно, указывая на вероятностную меру и соответствующее ей математическое ожидание того вероятностного пространства, на котором определен случайный элемент X_n, но устранение избыточности в употреблении символа n не вызывет путаницы.

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность случайных величин, т.е. случайных элементов со значениями в $\mathbb{R}$ (со стандартной метрикой). Тогда утверждение $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ при $n \to \infty$ равносильно *сходимости функций распределения в основном*: $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ во всех точках непрерывности $F(x)$, где $F_n(x) = \mathsf{P}(\xi_n \leqslant x)$, $F(x) = \mathsf{P}(\xi \leqslant x)$; причем, если функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то эта сходимость равномерна на отрезке $[a, b]$.

Пусть $\varphi_n(t) = \mathsf{E} \exp{(it\xi_n)}$ – характеристическая функция случайной величины ξ_n, $\varphi(t) = \mathsf{E} \exp{(it\xi)}$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Тогда утверждение $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ при $n \to \infty$ равносильно сходимости $\varphi_n(t)$ к $\varphi(t)$ при $n \to \infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Аналогичные утверждения справедливы для последовательности случайных векторов, т.е. случайных элементов со значениями в $\mathbb{R}^m$ (со стандартной метрикой), $m \in \mathbb{N}$.

Напомним также центральную предельную теорему: если $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, то случайная последовательность $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет соотношению

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением.

Доказательство указанных фактов можно найти в книгах [1], [2] и [9].

Теорема 1.2. *Пусть g – непрерывное отображение метрического пространства S в другое метрическое пространство S'. Если $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в пространстве S и $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$, то $g(X), g(X_1), g(X_2), \ldots$ – случайные элементы со значениями в пространстве S' и $g(X_n) \xrightarrow{D} g(X)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S'. Тогда $f \circ g$ – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на S, и поэтому при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}f(g(X_n)) = \mathsf{E}f \circ g(X_n) \to \mathsf{E}f \circ g(X) = \mathsf{E}f(g(X)).$$

Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в пространстве S. Для сходимости $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной ограниченной числовой функции f, заданной на S,*

$$f(X_n) \xrightarrow{D} f(X) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.1}$$

Доказательство. Необходимость условия (1.1) следует из теоремы 1.2. Докажем достаточность этого условия. Если соотношение (1.1) справедливо, то для любой непрерывной ограниченной числовой функции g одного числового переменного получаем, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}g(f(X_n)) \to \mathsf{E}g(f(X)). \tag{1.2}$$

Поскольку f – ограниченная функция, то существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in S$. Положим

$$g(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u \in [-M, M]; \\ M, & \text{если } u > M; \\ -M, & \text{если } u < -M. \end{cases}$$

Ясно, что g – непрерывная ограниченная функция и

$$g(f(X_n)) = f(X_n).$$

Поэтому из (1.2) следует, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}f\left(X_n\right) \to \mathsf{E}f\left(X\right).$$

Теорема доказана.

Центральную роль в дальнейшем играет *теорема о двупараметрической случайной последовательности.*

Теорема 1.4. *Пусть метрическое пространство S (с метрикой ρ) сепарабельно и случайные элементы $Y_n, X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots$ со значениями в пространстве S имеют одинаковую область определения при каждом $n \in \mathbb{N}$. Пусть*

1) $X_{m,n} \xrightarrow{D} X_m$ *при* $n \to \infty$;

2) $X_m \xrightarrow{D} X$ *при* $m \to \infty$;

3) $\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(\rho(X_{m,n}; Y_n) \geqslant \varepsilon) = 0$ *для произвольного фиксированного* $\varepsilon > 0$.

Тогда при $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} X.$$

Доказательство. Пусть F – замкнутое множество. Заметим, что и множество $F_\varepsilon := \{x\colon \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\}$, где $\rho(x,F)$ – расстояние от точки x до множества F, является замкнутым. Очевидно, что

$$\{Y_n \in F\} = \{Y_n \in F,\ \rho(Y_n, X_{m,n}) < \varepsilon\} \cup \{Y_n \in F,\ \rho(Y_n, X_{m,n}) \geqslant \varepsilon\}.$$

Но первое событие в правой части влечет событие $\{X_{m,n} \in F_\varepsilon\}$, а второе влечет событие $\{\rho\left(Y_n, X_{m,n}\right) \geqslant \varepsilon\}$. Поэтому

$$\mathsf{P}\left(Y_n \in F\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X_{m,n} \in F_\varepsilon\right) + \mathsf{P}\left(\rho\left(Y_n, X_{m,n}\right) \geqslant \varepsilon\right).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, учитывая теорему Александрова:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Y_n \in F\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X_m \in F_\varepsilon\right) + \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\rho\left(Y_n, X_{m,n}\right) \geqslant \varepsilon\right).$$

В этом соотношении перейдем к пределу при $m \to \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Y_n \in F\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X \in F_\varepsilon\right) + \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\rho\left(Y_n, X_{m,n}\right) \geqslant \varepsilon\right).$$

Но второе слагаемое в правой части равно нулю, поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Y_n \in F\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X \in F_\varepsilon\right).$$

А теперь в этом соотношении перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая аксиому непрерывности и то, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_\varepsilon F_\varepsilon = F$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Y_n \in F\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X \in F\right).$$

Откуда, вспоминая теорему 1.1′, получаем требуемое утверждение.

Замечание 1.2. В доказанной теореме сепарабельность пространства S обеспечивает измеримость числовой функции $\rho(X_{m,n}; Y_n)$.

В качестве применения рассмотренных теорем установим *условия сходимости по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями.*

Рассмотрим пространство $C[0,1]$ числовых функций, заданных и непрерывных на отрезке $[0,1]$, с метрикой равномерной сходимости: для $x, y \in C[0,1]$

$$\rho_{\text{равн}}(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| \,.$$

Это – сепарабельное пространство. Введем *модуль непрерывности* для $x \in C[0,1]$:

$$w_x(\delta) = \sup_{t,s\colon\, |t-s|\leqslant\delta} |x(t) - x(s)| \,,$$

где δ – положительное число ($t, s \in [0,1]$).

Доказательство следующих двух лемм предоставляется читателю.

Лемма 1.1. *Числовая функция x, заданная на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда* $\lim_{\delta\to 0} w_x(\delta) = 0$.

Для произвольной функции $x \in C[0,1]$ построим ее *кусочно-линейное приближение* $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}(t) = x\,(\delta k) + \frac{t-\delta k}{\delta}\left[x\,(\delta\,(k+1)) - x\,(\delta k)\right],$$

если $t \in [\delta k, \delta\,(k+1)]$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Лемма 1.2. *Если $x \in C[0,1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho_{\textit{равн}}\bigl(x, x^{(\delta)}\bigr) \leqslant 2w_x(\delta),$$

поэтому $\lim_{\delta\to 0} \rho_{\textit{равн}}\bigl(x, x^{(\delta)}\bigr) = 0$.

Если X – случайный элемент со значениями в $C[0,1]$, то любому $\omega \in \Omega$ соответствует непрерывная функция $X\,(t,\omega)$, $t \in [0,1]$. Можно показать, что $X\,(t,\omega)$ является случайным процессом (т.е. при фиксированном t числовая функция $X\,(t,\omega)$ является случайной величиной) с непрерывными траекториями. Наоборот, если $X\,(t,\omega)$ является случайным процессом с непрерывными траекториями, то его можно рассматривать как случайный элемент со значениями в $C[0,1]$.

Для случайного процесса X будем использовать и другие обозначения: $\{X(t)\}$ или $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – произвольные случайные процессы ($t \in [0,1]$). Говорят, что конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X, если для произвольного натурального числа m и произвольных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ из отрезка $[0,1]$ при $n \to \infty$

$$\{X_n(t_1), X_n(t_2), \ldots, X_n(t_m)\} \xrightarrow{D} \{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_m)\}.$$

Следующая теорема принадлежит Ю. В. Прохорову, внесшему определяющий вклад в теорию сходимости случайных процессов.

Теорема 1.5. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с непрерывными траекториями. Если конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(w_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0, \tag{1.3}$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$. Наоборот, из сходимости по распределению в $C[0,1]$ процессов с непрерывными траекториями следуют сходимость конечномерных распределений и условие (1.3).

Доказательство. Начнем с первого утверждения. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$X_{m,n} = X_n^{(\delta)}, \qquad \widetilde{X}_m = X^{(\delta)}.$$

По лемме 1.2

$$\rho_{\text{равн}}\left(X_{m,n}, X_n\right) \leqslant 2 w_{X_n}(\delta).$$

Поэтому в силу (1.3)

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\rho_{\text{равн}}\left(X_{m,n}, X_n\right) \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{1.4}$$

Далее, пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на $C[0,1]$. Тогда $f\left(X_{m,n}\right)$ есть непрерывная ограниченная числовая функция g от случайного вектора $\{X_n(0), X_n(1/m), \ldots, X_n(1)\}$, который сходится по распределению в $\mathbb{R}^{m+1}$

при $n \to \infty$ к случайному вектору $\{X(0), X(1/m), \ldots, X(1)\}$. Поэтому при $n \to \infty$

$$f(X_{m,n}) = g(X_n(0), X_n(1/m), \ldots, X_n(1)) \xrightarrow{D}$$
$$\xrightarrow{D} g(X(0), X(1/m), \ldots, X(1)) = f(\widetilde{X}_m).$$

По теореме 1.3 отсюда следует, что при $n \to \infty$

$$X_{m,n} \xrightarrow{D} \widetilde{X}_m. \tag{1.5}$$

По лемме 1.2

$$\lim_{m\to\infty} \rho_{\text{равн}}(\widetilde{X}_m, X) = 0,$$

но из сходимости почти наверное (п.н.) следует сходимость по распределению, поэтому при $m \to \infty$

$$\widetilde{X}_m \xrightarrow{D} X. \tag{1.6}$$

Из соотношений (1.4)–(1.6) по теореме 1.4 получаем, что при $n \to \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Докажем второе утверждение. Отображения

$$x \to w_x(\delta),$$
$$x \to \{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_m)\}$$

являются непрерывными на $C[0,1]$ (здесь m – произвольное натуральное число, а $t_1, t_2, \ldots, t_m$ – произвольные числа из отрезка $[0,1]$). Отсюда по теореме 1.2 находим, во-первых, что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(w_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon) = \mathsf{P}(w_X(\delta) \geqslant \varepsilon),$$

но

$$\lim_{\delta\to 0} \mathsf{P}(w_X(\delta) \geqslant \varepsilon) = 0,$$

следовательно, условие (1.3) выполнено. Во-вторых, при $n \to \infty$

$$\{x_n(t_1), x_n(t_2), \ldots, x_n(t_m)\} \xrightarrow{D} \{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_m)\}.$$

Теорема доказана.

Пример 1.1. Рассмотрим случайные процессы (не зависящие от ω) с непрерывными траекториями: $X(t) \equiv 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$X_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leqslant t \leqslant 1/n; \\ 2 - nt, & 1/n \leqslant t \leqslant 2/n; \\ 0, & 2/n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что конечномерные распределения процесса X_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X, но условие (1.3) не выполняется. Таким образом, сходимости конечномерных распределений недостаточно для сходимости по распределению в пространстве $C[0, 1]$.

Лекции 2–3
Условия сходимости по распределению случайных процессов с траекториями из $D[0,1]$

Рассмотрим пространство $D[0,1]$ числовых функций, имеющих пределы слева и непрерывных справа на отрезке $[0,1]$ (выбор отрезка $[0,1]$ вместо произвольного отрезка $[a,b]$ вызван лишь соображениями удобства). Такие функции измеримы, ограничены и имеют не более чем счетное число точек разрыва, причем число точек, разрыв в которых превосходит заданное положительное число, конечно.

Введем *метрику Скорохода*: для $x, y \in D[0,1]$

$$\rho_{\text{ск}}(x,y) = \inf_{\lambda} \max\left\{ \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t|\,, \sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| \right\}.$$

Инфинум здесь берется по всем строго возрастающим и непрерывным отображениям λ отрезка $[0,1]$ на $[0,1]$. Две функции в этой метрике близки друг к другу, если график одной из них получается из графика другой с помощью небольших деформаций как вдоль оси ординат, так и вдоль оси абсцисс. Очевидно, что $\rho_{\text{равн}}\,(x,y) \geqslant \rho_{\text{ск}}(x,y)$.

Пример 2.1. Пусть (см. рис. 1)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t\in[0;1/2)\,, \\ 1/2, & t\in[1/2;1]\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad y(t) = \begin{cases} 1, & t\in[0;2/3)\,, \\ 1/2, & t\in[2/3;1]\,. \end{cases}$$

Ясно, что $\rho_{\text{равн}}(x,y) = 1/2$. Пусть

$$\lambda(t) = \begin{cases} 3t/4, & t\in[0;2/3)\,; \\ 1/2 + (3/2)\,(t-2/3)\,, & t\in[2/3;1]\,. \end{cases}$$

Тогда $x(\lambda(t)) \equiv y(t)$ и $\sup_{t\in[0,1]} |x(\lambda(t)) - y(t)| = 0$, а $\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| = 1/6$. Нетрудно показать, что $\rho_{\text{ск}}(x,y) = 1/6$.

Пространство $D[0,1]$ сепарабельно. В нем всюду плотно множество ступенчатых функций, принимающих рациональные значения в точке 1 и на промежутках $[i/k, (i+1)\,/k)$, где $k\in\mathbb{N}$, а $i = 0, \ldots, k-1$.

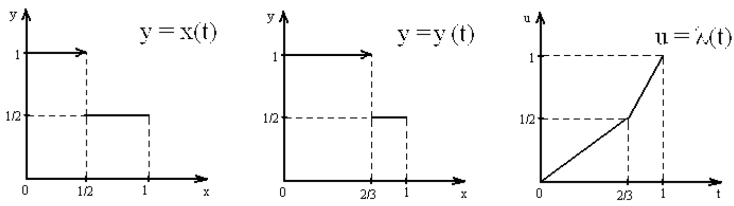

Рис. 1.

Положим для $x \in D[0,1]$ и a, b таких, что $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$,

$$w_x\left[a,b\right) = \sup_{s,t\in[a,b)} \left|x(s) - x(t)\right|.$$

Напомним, что разбиением отрезка $[0,1]$ называется совокупность точек $t_0, t_1, \ldots, t_r$ (при $r = 2, 3, \ldots$) таких, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots \cdots < t_r = 1$. Введем *модуль непрерывности* для $x \in D[0,1]$:

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_i \omega_x\left[t_i, t_{i+1}\right),$$

где δ – положительное число, а инфинум берется по всем разбиениям $\{t_i\}$ отрезка $[0,1]$, для которых $\min_i\left(t_{i+1} - t_i\right) \geqslant \delta$. Заметим, что в лекции 1 можно было определить аналогичный модуль непрерывности для непрерывных функций (достаточный для наших целей):

$$\widetilde{w}_x(\delta) = \max\left\{w_x\left[0,\delta\right), w_x\left[\delta, 2\delta\right), \ldots\right\}.$$

Если x – ступенчатая функция и δ не больше наименьшей длины ступенек, то $w'_x(\delta) = 0$. Можно показать, что если функция $x \in D[0,1]$ имеет конечное число точек разрыва, то $w'_x(\delta)$ при малых δ совпадает с модулем непрерывности непрерывной функции, получающейся из x путем устранения разрывов.

Лемма 2.1. *Числовая функция x, заданная на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству $D[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\delta\to 0} w'_x(\delta) = 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in D[0,1]$. Покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0} w'_x(\delta) = 0.$$

Поскольку $w'_x(\delta)$ не возрастает по δ, достаточно для любого $\varepsilon > 0$ установить существование такого разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[0,1]$, что $\max_i w_x\,[t_i, t_{i+1}) < \varepsilon$. Рассмотрим все $t \in [0,1]$, для которых существует такое разбиение промежутка $[0,t)$. Пусть τ – точная верхняя грань таких t. Поскольку функция x непрерывна в точке 0 справа, то $\tau > 0$. Далее, в силу существования предела слева $x\,(\tau-)$ число τ само является таким t. Ясно, что τ не может быть меньше 1, т.к. из-за непрерывности функции x справа вместо τ можно взять большее число в качестве t. Итак, $\tau = 1$. Требуемое утверждение доказано. Доказательство обратного утверждения предоставляется читателю.

Лемма 2.2. *Если $x \in D[0,1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство $w'_x(\delta) \leqslant w_x\,(2\delta)$.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[0,1]$ так, чтобы $\delta \leqslant t_{i+1} - t_i \leqslant 2\delta$. Тогда для любого i выполняется неравенство $w_x\,(2\delta) \geqslant w_x\,[t_i, t_{i+1})$ и, следовательно,

$$w_x\,(2\delta) \geqslant \max_i w_x\,[t_i, t_{i+1}) \geqslant w'_x(\delta).$$

Лемма доказана.

Для произвольной функции $x \in D[0,1]$ построим ее ступенчатое приближение $x^{(\delta)}$ при $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$:

$$x^{(\delta)}(t) = \begin{cases} x\,(\delta k)\,, & t \in [\delta k, \delta\,(k+1))\,,\ k = 0, 1, \ldots, 1/\delta - 1; \\ x(1), & t = 1. \end{cases}$$

Лемма 2.3. *Если $x \in D[0,1]$, то при $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho_{ск}\big(x, x^{(\delta)}\big) \leqslant w'_x(\delta) + \delta,$$

поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \rho_{ск}\big(x, x^{(\delta)}\big) = 0.$$

Доказательство. Существует такое разбиение $\{s_i\}$ отрезка $[0,1]$, что $\min_i\,(s_{i+1} - s_i) \geqslant \delta$ и $\max_i w\,[s_i, s_{i+1}) \leqslant w'_x(\delta) + \delta$. Пусть $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разбиение $t_i = i\delta$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Для каждой точки s_i существует единственный промежуток $[t_{j_i}, t_{j_i+1})$, ее содержащий. Очевидно, t_{j_i+1} строго возрастает по i.

Возьмем в качестве λ кусочно-линейную функцию, отображающую t_{j_i+1} в s_i для каждого i. Ясно, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t)-t| \leqslant \delta. \tag{2.1}$$

Пусть $t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)$, тогда $\lambda(t) \in [s_i, s_{i+1})$ и $x(\lambda(t))$ изменяется так, как $x(s)$ изменяется при $s \in [s_i, s_{i+1})$, т.е. изменение $x(\lambda(t))$ не превосходит $w_x\,[s_i, s_{i+1})$. Множество значений функции $x^{(\delta)}(t)$ при $t \in \left[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1}\right)$ состоит из $x\left(t_{j_i+1}\right), \ldots, x\left(t_{j_{i+1}}\right)$, но $t_{j_i+1}, \ldots, t_{j_{i+1}} \in [s_i, s_{i+1})$, поэтому для каждого i

$$\sup_{t\in[t_{j_i+1}, t_{j_{i+1}+1})} \left|x^{(\delta)}(t)-x(\lambda(t))\right| \leqslant w_x\,[s_i, s_{i+1})\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|x^{(\delta)}(t)-x(\lambda(t))\right| \leqslant \max_i w_x\,[s_i, s_{i+1}) \leqslant w'_x(\delta)+\delta. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следует утверждение леммы.

Если X – случайный элемент со значениями в $D[0,1]$, то любому $\omega \in \Omega$ соответствует функция $X\,(t,\omega)$, $t \in [0,1]$, принадлежащая $D[0,1]$. Можно показать, что $X\,(t,\omega)$ является случайным процессом (т.е. при фиксированном t числовая функция $X\,(t,\omega)$ является случайной величиной) с траекториями из $D[0,1]$. Наоборот, если $X\,(t,\omega)$ является случайным процессом с траекториями из $D[0,1]$, то его можно рассматривать как случайный элемент со значениями в $D[0,1]$.

Теорема 2.1. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0,1]$. Если конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n\to\infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(w'_{X_n}(\delta)\geqslant\varepsilon\right)=0, \tag{2.3}$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Положим $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, и по X_n построим ступенчатое приближение $X_{m,n} = X_n^{(\delta)}$, а по X построим $\widetilde{X}_m = X^{(\delta)}$.

Покажем, что при $n \to \infty$

$$X_{n,m} \xrightarrow{D} \widetilde{X}_m. \tag{2.4}$$

В силу теоремы 1.3 достаточно показать, что для произвольной непрерывной ограниченной числовой функции f, заданной на $D[0,1]$, при $n \to \infty$

$$f\left(X_{n,m}\right) \xrightarrow{D} f(\widetilde{X}_m). \tag{2.5}$$

Ясно, что $f\left(X_{n,m}\right)$ является непрерывной ограниченной числовой функцией g случайного вектора $\{X_n\left(0\right), X_n\left(1/m\right), \ldots, X_n(1)\}$, который по условию теоремы сходится по распределению в $\mathbb{R}^{m+1}$ к $\{X(0), X\left(1/m\right), \ldots, X(1)\}$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$g\left(X_n(0), X_n\left(1/m\right), \ldots, X_n(1)\right) \xrightarrow{D} g\left(X(0), X\left(1/m\right), \ldots, X(1)\right)$$

при $n \to \infty$. Осталось заметить, что

$$g\left(X(0), X\left(1/m\right), \ldots, X(1)\right) = f(\widetilde{X}_m).$$

Соотношение (2.5) и, следовательно, (2.4) доказаны.

Покажем, что при $m \to \infty$

$$\widetilde{X}_m \xrightarrow{D} X. \tag{2.6}$$

Действительно, по леммам 2.1 и 2.3

$$\rho_{\text{ск}}(X, \widetilde{X}_m) = \rho_{\text{ск}}\big(X, X^{(\delta)}\big) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

т.е. имеет место сходимость п.н. Из сходимости п.н. следует сходимость по распределению, т.е. соотношение (2.6).

Наконец, ввиду леммы 2.3

$$\rho_{\text{ск}}\left(X_n, X_{m,n}\right) = \rho_{\text{ск}}\big(X_n, X_n^{(\delta)}\big) \leqslant w'_{X_n}(\delta) + \delta.$$

Поэтому по условию (2.3) при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\rho_{\text{ск}}\left(X_n, X_{m,n}\right) - \delta \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\rho_{\text{ск}}\left(X_n, X_{m,n}\right) \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.4), (2.6), (2.7), ввиду теоремы 1.4, получаем утверждение теоремы 2.1.

Иногда вместо модуля непрерывности $w'_x(\delta)$ удобнее рассматривать другой *модуль непрерывности* для $x \in D[0,1]$:

$$w''_x(\delta) = \sup_{\substack{t,t_1,t_2:\\ |t_1-t_2|\leqslant\delta, t\in[t_1,t_2]}} \min\left\{|x(t)-x(t_1)|, |x(t_2)-x(t)|\right\},$$

где δ – положительное число ($t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 \leqslant t_2$).

Лемма 2.4. *Для любой функции $x \in D[0,1]$*

$$w''_x(\delta) \leqslant w'_x(\delta).$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое разбиение $\{s_i\}$ отрезка $[0,1]$, что $\min_i(s_{i+1}-s_i) \geqslant \delta$ и $\max_i w[s_i, s_{i+1}) \leqslant w'_x(\delta)+\varepsilon$. Пусть t_1 и t_2 таковы, что $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, $|t_1-t_2| \leqslant \delta$. Тогда либо оба t_1 и $t_2 \in [s_i, s_{i+1})$ для некоторого i и, следовательно, при $t \in [t_1, t_2]$

$$|x(t)-x(t_1)| \leqslant w'_x(\delta)+\varepsilon, |x(t)-x(t_2)| \leqslant w'_x(\delta)+\varepsilon;$$

либо t_1 и t_2 лежат в соседних промежутках $[s_{i-1}, s_i)$ и $[s_i, s_{i+1})$, поэтому при $t \in [t_1, s_i)$

$$|x(t)-x(t_1)| \leqslant w'_x(\delta)+\varepsilon,$$

а при $t \in [s_i, t_2]$

$$|x(t)-x(t_2)| \leqslant w'_x(\delta)+\varepsilon.$$

Итак,

$$w''_x(\delta) \leqslant w'_x(\delta)+\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то получаем утверждение леммы.

Лемма 2.5. *Для любого $x \in D[0,1]$*

$$w'_x(\delta/2) \leqslant 6a, \tag{2.8}$$

$$w_x[0,\delta) \leqslant 2b, \tag{2.9}$$

где $a = \max\left(w''_x(\delta), w_x[0,\delta), w_x[1-\delta,1)\right)$, $b = |x(\delta)-x(0)| + w''_x(\delta)$, $\delta \in (0,1)$.

Доказательство. Сначала заметим, что при $s \in [0,\delta)$

$$|x(s)-x(0)| \leqslant |x(\delta)-x(0)| + \min\left\{|x(s)-x(0)|, |x(\delta)-x(s)|\right\}.$$

Поэтому

$$\sup_{s\in[0,\delta)} |x(s)-x(0)| \leqslant |x(\delta)-x(0)| + w''_x(\delta)$$

и, следовательно,

$$w_x\,[0,\delta) \leqslant 2\,|x(\delta)-x(0)| + 2w''_x(\delta).$$

Итак, соотношение (2.9) установлено.

Доказательство соотношения (2.1) разобьем на части.

1) Сначала покажем, что для любых t, t_1, t_2, s таких, что $|t_1-t_2| \leqslant \delta$, $0 \leqslant t_1 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$\min\left(|x(s)-x(t_1)|\,, |x(t_2)-x(t)|\right) \leqslant 2w''_x(\delta). \tag{2.10}$$

Пусть $|x(s)-x(t_1)| > w''_x(\delta)$, тогда $|x(s)-x(t_2)| \leqslant w''_x(\delta)$, $|x(s)-x(t)| \leqslant w''_x(\delta)$. Следовательно, $|x(t_2)-x(t)| \leqslant 2w''_x(\delta)$. Если же $|x(s)-x(t_1)| \leqslant w''_x(\delta)$, то (2.10) выполняется.

2) Докажем, что если расстояние между двумя точками интервала $(0,1)$ меньше δ, то не более чем в одной из них скачок функции x больше $2a$. Доказательство проведем от противного. Пусть τ_1 и τ_2 ($\tau_1 \leqslant \tau_2$) – две точки из интервала $(0,1)$, в которых скачок функции x больше $2a$, и пусть $|\tau_1-\tau_2| < \delta$. Взяв t_1 и t достаточно близко (с левой стороны) к τ_1 и τ_2 соответственно и положив $t_2=\tau_2$, $s=\tau_1$, получим, что $|t_1-t_2|<\delta$ и $|x(s)-x(t_1)| > 2w''_x(\delta)$, $|x(t)-x(t_2)| > 2w''_x(\delta)$, что противоречит (2.10).

Заметим также, что по определению a промежутки $[0,\delta)$ и $[1-\delta,1)$ не содержат точек, в которых скачок функции x больше $2a$.

3) Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $\{s_i\}$ так, что $s_{i+1}-s_i \geqslant \delta$ для любого i и скачки функции x, превышающие $2a$, могут быть лишь в точках s_i. Полученное разбиение требуется измельчить: если $s_{i+1}-s_i > \delta$ для некоторого i, то включим середину отрезка $[s_i, s_{i+1}]$ в разбиение $\{s_i\}$; будем поступать аналогично до тех пор, пока для любого i не будет выполняться соотношение

$$\frac{\delta}{2} \leqslant s_{i+1}-s_i \leqslant \delta.$$

4) Покажем, что для итогового разбиения $\{s_i\}$ при любом i

$$w_x\,[s_i, s_{i+1}) \leqslant 6a. \tag{2.11}$$

Возьмем две точки t_1 и t_2 ($t_1 \leqslant t_2$) из $[s_i, s_{i+1})$. Пусть

$$\sigma_1 = \sup\left\{\sigma \in [t_1, t_2] : \sup_{t_1 \leqslant u \leqslant \sigma} |x(u) - x(t_1)| \leqslant 2a\right\},$$

$$\sigma_2 = \inf\left\{\sigma \in [t_1, t_2] : \sup_{\sigma \leqslant u \leqslant t_2} |x(t_2) - x(u)| \leqslant 2a\right\}.$$

Покажем, что $\sigma_2 \leqslant \sigma_1$. Доказательство проведем от противного. Пусть $\sigma_2 > \sigma_1$. В любой правой окрестности σ_1 существует такая точка s, что $|x(s) - x(t_1)| > 2a$, а в любой левой окрестности σ_2 существует такая точка t, что $|x(t) - x(t_2)| > 2a$. Но это противоречит (2.10).

Итак, $\sigma_2 \leqslant \sigma_1$ и, следовательно,

$$|x(\sigma_1-) - x(t_1)| \leqslant 2a, |x(\sigma_1) - x(t_2)| \leqslant 2a, |x(\sigma_1) - x(\sigma_1-)| \leqslant 2a \tag{2.12}$$

(последнее неравенство объясняется тем, что $\sigma_1 \in (t_1, t_2]$ и, следовательно, σ_1 является внутренней точкой отрезка $[s_i, s_{i+1}]$, поэтому скачок функции x в ней не превосходит $2a$). Из (2.12) следует, что $|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant 6a$. Итак, соотношение (2.11) и, следовательно, (2.8) установлены. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0,1]$, причем $X(1-) = X(1)$ п.н. Если конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(w''_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0, \tag{2.13}$$

то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(w'_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0, \tag{2.14}$$

откуда, ввиду теоремы 2.1, будет следовать утверждение теоремы 2.2.

Из сходимости конечномерных распределений X_n получаем, что при $n \to \infty$

$$\{X_n(0), X_n(\delta)\} \xrightarrow{D} \{X(0), X(\delta)\}.$$

Следовательно, по теореме 1.2 при $n \to \infty$

$$|X_n(\delta) - X_n(0)| \xrightarrow{D} |X(\delta) - X(0)|\,. \tag{2.15}$$

Далее, в силу непрерывности X в точке 0 справа $\lim_{\delta\to 0} X(\delta) = X(0)$, но из сходимости п.н. следует сходимость по вероятности: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \mathsf{P}\left(|X(\delta) - X(0)| \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.16}$$

Из соотношения (2.15) следует, что для всех $\varepsilon > 0$ (за исключением, быть может, некоторого счетного множества)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(|X_n(\delta) - X_n(0)| \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(|X(\delta) - X(0)| \geqslant \varepsilon\right),$$

откуда, учитывая (2.16), находим, что при любом при $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(|X_n(\delta) - X_n(0)| \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.17}$$

Ввиду леммы 2.5

$$w_{X_n}[0,\delta) \leqslant 2\,|X_n(\delta) - X_n(0)| + 2w''_{X_n}(\delta).$$

Откуда с учетом (2.13) и (2.17) получаем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{X_n}[0,\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.18}$$

Аналогично показывается, что если $X(1-) = X(1)$ п.н., то при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{X_n}[1-\delta,1) \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.19}$$

В силу леммы 2.5

$$w'_{X_n}\left(\frac{\delta}{2}\right) \leqslant 6\max\left(w''_{X_n}(\delta), w_{X_n}[0,\delta)\,, w_{X_n}[1-\delta,1)\right),$$

поэтому, учитывая (2.13), (2.18) и (2.19), приходим к (2.14). Теорема доказана.

Чтобы установить справедливость условия (2.13), иногда полезно использовать следующее утверждение.

Лемма 2.6. *Пусть X – случайный процесс с траекториями из $D[0,1]$. Пусть $\gamma > 0$, $\alpha > 1/2$, F – неубывающая непрерывная числовая функция на $[0,1]$. Если при любых t, t_1, t_2, таких, что $0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant 1$, справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}\left(|X(t) - X(t_1)|^{\gamma}\, |X(t_2) - X(t)|^{\gamma}\right) \leqslant \left[F(t_2) - F(t_1)\right]^{2\alpha}, \qquad (2.20)$$

то при всех $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(w''_X(\delta) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{K}{\varepsilon^{2\gamma}} \left[F(1) - F(0)\right] \left[w_F\left(2\delta\right)\right]^{2\alpha - 1},$$

где K – положительная постоянная, не зависящая от ε, δ.

Доказательство. Из соотношения (2.20), дважды применяя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\min\left\{|X(t) - X(t_1)|, |X(t_2) - X(t)|\right\} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{2\gamma}} \left[F(t_2) - F(t_1)\right]^{2\alpha}. \qquad (2.21)$$

Положим при $x \in D[0,1]$ и a, b таких, что $0 \leqslant a < b \leqslant 1$,

$$M''_x(a,b) = \sup_{t,t_1,t_2:\; a \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant b} \min\left\{|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\right\}.$$

Можно показать (см. [2, теорема 12.5]), что соотношение (2.21) влечет неравенство

$$\mathsf{P}\left(M''_X(a,b) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{K_1}{\varepsilon^{2\gamma}} \left[F(b) - F(a)\right]^{2\alpha},$$

где K_1 – положительная постоянная, не зависящая от ε, a, b.

Пусть $\delta = 1/(2m)$, где $m \in \mathbb{N}$. Если

$$M''_X\left(2i\delta, (2i+2)\,\delta\right) < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

и

$$M''_X\left((2i+1)\,\delta, (2i+3)\,\delta\right) < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 0, 1, \ldots, m-2,$$

то при t_1, t_2 таких, что $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$ и $t_2 - t_1 \leqslant \delta$, обе точки t_1, t_2 лежат в одном из $2m-1$ отрезков $[2i\delta, (2i+2)\,\delta]$ или $[(2i+1)\,\delta, (2i+3)\,\delta]$, поэтому при $t \in [t_1, t_2]$

$$\min\left\{|X(t) - X(t_1)|, |X(t_2) - X(t)|\right\} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(w''_X(\delta) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{K_1}{\varepsilon^{2\gamma}}\left[\sum_{i=0}^{m-1}\left[F\left((2i+2)\,\delta\right) - F\left(2i\delta\right)\right]^{2\alpha} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{m-2}\left[F\left((2i+3)\,\delta\right) - F\left((2i+1)\,\delta\right)\right]^{2\alpha}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2K_1}{\varepsilon^{2\gamma}}\left[w_F\left(2\delta\right)\right]^{2\alpha-1}\left[F(1) - F(0)\right].$$

Осталось положить $K = 2K_1$. Лемма доказана.

Частое применение находит следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0,1]$. Пусть конечномерные распределения случайного процесса X_n сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса X и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(w_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{2.22}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$X_n \xrightarrow{D} X, \tag{2.23}$$

причем траектории X п.н. непрерывны.

Доказательство. Из соотношения (2.22), ввиду леммы 2.2, следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(w'_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Откуда, вспоминая теорему 2.1, получаем (2.23). Доказательство непрерывности траекторий X предоставляется читателю.

В заключение обсудим требование о сходимости конечномерных распределений. Рассмотрим отображение $D[0,1]$ в $\mathbb{R}$: $x \to x(t)$, где t – фиксированное число из отрезка $[0,1]$. Это отображение измеримо. При $t \in (0,1)$ оно является непрерывным тогда и только тогда, когда функция x непрерывна в точке t. Пусть P – вероятностная мера, заданная на $D[0,1]$. Нетрудно показать, что множество T_P таких t, при которых указанное отображение непрерывно P-п.н., содержит точки 0 и 1 и его дополнение в $[0,1]$ не более, чем счетно.

В силу этих свойств множества T_P для любого $\delta > 0$ существует такое разбиение $\{t_i\}$ отрезка $[0,1]$, что $t_i \in T_P$ и $t_{i+1} - t_i \leqslant \delta$ для любого i. По функции $x \in D[0,1]$ будем строить ее ступенчатое приближение $x^{(\delta)}$, исходя из этого разбиения. Тогда (см. лемму 2.3) $\rho_{\text{ск}}\bigl(x, x^{(\delta)}\bigr) \leqslant w'_x(\delta) + \delta$.

Из сказанного следует, что если $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные процессы с траекториями из $D[0,1]$, то из сходимости $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$ следует сходимость конечномерных распределений, соответствующих точкам $t_1, t_2, \ldots, t_m$ из T_{P_X}, где P_X – мера, индуцированная случайным процессом X в $D[0,1]$. Наоборот, если в условиях теорем 2.1–2.3 вместо сходимости произвольных конечномерных распределений потребовать сходимости конечномерных распределений, соответствующих точкам $t_1, t_2, \ldots, t_m$ из T_{P_X}, то $X_n \xrightarrow{D} X$ при $n \to \infty$.

Лекция 4
Определение броуновского движения и его существование

Одним из важнейших случайных процессов является *винеровский процесс*, называемый также *броуновским движением.*

Определение 4.1. Случайный процесс $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$ называется *стандартным броуновским движением*, если

1) $W(0) = 0$ п.н.;

2) приращения процесса $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ при любых $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$, являются независимыми случайными величинами;

3) случайная величина $W(t) - W(s)$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $t - s$ при любых t, s таких, что $0 \leqslant s < t$;

4) траектории процесса $\{W(t)\}$ п.н. непрерывны.

Можно дать и другое определение броуновского движения.

Определение 4.2. Случайный процесс $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$ называется *стандартным броуновским движением*, если

1) $W(0) = 0$ п.н.;

2) случайный вектор $\{W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)\}$ имеет многомерное нормальное распределение при любых $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2, \dots, t_m$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$;

3) $\mathsf{E}W(t) = 0$ при любом $t \in [0, \infty)$, $\operatorname{cov}(W(t_1), W(t_2)) = \min(t_1, t_2)$ при любых $t_1, t_2 \in [0, \infty)$;

4) траектории процесса $\{W(t)\}$ п.н. непрерывны.

Прежде, чем доказывать эквивалентность этих определений, напомним некоторые сведения о нормальных распределениях. Говорят, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 \in (0, \infty)$ (обозначение: $\xi \sim N\left(a, \sigma^2\right)$), если ξ является непрерывной случайной величиной с плотностью вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Нормальное распределение называется стандартным, если $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Функция распределения в этом случае обозначается $\Phi(x)$ и называется функцией Лапласа.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины и $\xi_i \sim N(0,1)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Пусть A и b – произвольные числовые матрицы размеров $n \times n$ и $n \times 1$. Распределения случайных векторов $A\xi + b$ (здесь случайные векторы представлены в виде столбцов) и только они называются n-мерными нормальными распределениями. Случайные векторы с такими распределениями называются нормальными.

Если $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ – нормальный вектор и $\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = 0$ при всех i, j таких, что $i \neq j$, то случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ являются независимыми. Если же $\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = 0$ при всех i, j таких, что $i \leqslant k$, $j > k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, то случайные векторы $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\}$ и $\{\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \ldots, \eta_n\}$ являются независимыми.

Доказательство эквивалентности. Очевидно,

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \ldots\ldots \\ W(t_m) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \ldots\ldots \\ W(t_m) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где A – матрица, обратная к первой матрице в правой части (4.1).

Если W удовлетворяет условиям определения 1, то случайный вектор $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})\}$ является нормальным, откуда, ввиду (4.2), случайный вектор $\{W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m)\}$ также является нормальным. Далее, при $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(W(t_1), W(t_2)) = \mathsf{E}W(t_1)W(t_2) = \\ &\qquad = \mathsf{E}W(t_1)\,(W(t_2) - W(t_1)) + \mathsf{E}W^2(t_1) = t_1 \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $W(t_1)$ и $(W(t_2) - W(t_1))$ – независимые случайные величины и поэтому $\mathsf{E}W(t_1)\,(W(t_2) - W(t_1)) = 0$).

Если же W удовлетворяет условиям определения 4.2, то ввиду (4.1) из того, что вектор $\{W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)\}$ является нормальным, следует, что и вектор $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})\}$ нормальный. Его компоненты некоррелированы, т.к. при $j > i$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,(W(t_{i+1}) - W(t_i))\,(W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \\ = \mathsf{E}W(t_{i+1})W(t_{j+1}) - \mathsf{E}W(t_{i+1})W(t_j) - \\ - \mathsf{E}W(t_i)W(t_{j+1}) + \mathsf{E}W(t_i)W(t_j) = \\ = t_{i+1} - t_{i+1} - t_i + t_i = 0, \end{aligned}$$

поэтому случайные величины $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ являются независимыми. Наконец,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,(W(t) - W(s))^2 = \mathsf{E}W^2(t) - 2\mathsf{E}W(t)W(s) + \mathsf{E}W^2(s) = \\ = t - 2s + s = t - s. \end{aligned}$$

Эквивалентность доказана.

Докажем существование броуновского движения. Зададим его явную конструкцию, исходя из последовательности независимых случайных величин с одинаковым распределением $N(0,1)$ и функций Шаудера.

Дадим их определение, но сначала напомним определение функций Хаара. Эти функции обозначаются $H_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, и задаются на отрезке $[0,1]$. Функция H_1 тождественно равна 1. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) введем 2^n функций Хаара H_{2^n+k}, где $k = 1, 2, \dots, 2^n$. Для этой цели разобьем отрезок $[0,1]$ на 2^n равных отрезков и пронумеруем их слева направо. Возьмем k-й такой отрезок. Вне его положим $H_{2^n+k}(t) = 0$. Разделим указанный отрезок пополам. На левой его половине положим $H_{2^n+k}(t) = 2^{-n/2}$, а на правой – положим $H_{2^n+k}(t) = -2^{-n/2}$ (см. рис. 2).

Рассмотрим пространство $L^2[0,1]$ измеримых числовых функций x, заданных на отрезке $[0,1]$ и интегрируемых в квадрате: $\int_0^1 x^2(t)\,dt < +\infty$. Известно, что функции Хаара образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2[0,1]$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt \quad \text{для} \quad x, y \in L^2[0,1].$$

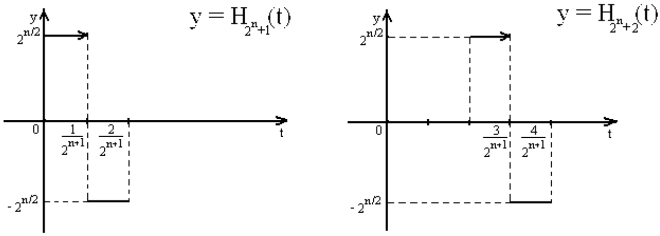

Рис. 2.

Поэтому любую функцию $x \in L^2[0,1]$ можно разложить в ряд по этой системе функций:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i H_i, \quad \text{где} \quad a_i = (x, H_i)\,;$$

и выполнено равенство Парсеваля:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, H_i)\,(y, H_i)\,.$$

Построим непрерывные неотрицательные функции $S_i(t)$, называемые функциями Шаудера, на основе $H_i(t)$:

$$S_i(t) = \int_0^t H_i(s)\,ds, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что при $i \in \left\{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$

$$|S_i(t)| \leqslant \frac{2^{n/2}}{2^{n+1}} = 2^{-n/2-1} \tag{4.3}$$

и при разных $i_1, i_2 \in \left\{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$ функции $S_{i_1}(t), S_{i_2}(t)$ имеют непересекающиеся носители.

Установим два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть числовая последовательность* $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ *такова, что* $a_i = O\left(i^{\varepsilon}\right)$ *при* $i \to \infty$ *для некоторого* $\varepsilon \in (0, 1/2)$. *Тогда ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i S_i(t)$ *сходится равномерно по* t *на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Существует такая положительная постоянная K, что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|a_i| \leqslant K i^{\varepsilon}$, поэтому при всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $i \in \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}$ $|a_i| \leqslant K 2^{(n+1)\varepsilon}$. Откуда, учитывая (4.3) и то, что функции $S_i(t)$ при разных $i \in \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}$ имеют попарно непересекающиеся носители, получаем, что при всех $t \in [0, 1]$

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_i|\, S_i(t) \leqslant K 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-n/2-1} = K 2^{\varepsilon-1} 2^{-n(1/2-\varepsilon)}.$$

Следовательно, при $m \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0, 1]$

$$\sum_{i=2^m+1}^{\infty} |a_i|\, S_i(t) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} K 2^{\varepsilon-1} 2^{-n(1/2-\varepsilon)},$$

но правая часть стремится к нулю при $m \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, причем $\xi_i \sim N(0,1)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной постоянной $c \in (\sqrt{2}, \infty)$ и почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$ существует такое натуральное число $N_0(c, \omega)$, что при всех $i \geqslant N_0(c, \omega)$ будет $|\xi_i| < c\sqrt{\ln i}$.*

Доказательство. Нам потребуется лемма Бореля–Кантелли, утверждающая, что если случайные события $A_1, A_2, \ldots$ таковы, что $\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i) < +\infty$, то для п.в. ω произойдет лишь конечное число событий из $A_1, A_2, \ldots$. Заметим, что если $\xi \sim N(0,1)$, то при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) = \mathsf{P}(\xi \geqslant x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2}. \qquad (4.4)$$

Действительно,

$$\mathsf{P}(\xi \geqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{u} de^{-u^2/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{u^2} e^{-u^2/2}\, du \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2}.$$

Поэтому при $i \geqslant 2$

$$\mathsf{P}\left(|\xi_i| \geqslant c\sqrt{\ln i}\,\right) \leqslant \frac{2}{c\sqrt{2\pi \ln i}} e^{-\left(c^2 \ln i\right)/2} = \frac{2 i^{-c^2/2}}{c\sqrt{2\pi \ln i}}.$$

При $c > \sqrt{2}$ ряд $\sum_{i=2}^{+\infty} i^{-c^2/2}/\sqrt{\ln i}$ сходится. Следовательно, для п.в. ω лишь для i из конечного множества выполняется неравенство $|\xi_i(\omega)| \geqslant c\sqrt{\ln i}$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые случайные величины, причем $\xi_i \sim N(0,1)$, $i \in \mathbb{N}$; $S_1, S_2, \ldots$ – функции Шаудера, тогда*

$$W(t,\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t)\xi_i(\omega) \tag{4.5}$$

является броуновским движением при $t \in [0,1]$.

Доказательство. В силу лемм 4.1 и 4.2 для п.в. ω ряд в правой части (4.5) сходится равномерно по t на отрезке $[0,1]$. Функции $S_i(t)$ непрерывны по t при любом $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, для п.в. ω правая часть (4.5) является непрерывной по t функцией.

Покажем, что ряд в правой части (4.5) сходится в среднем квадратическом. Напомним, что если $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ – случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве, то сходимость в среднем квадратическом случайной последовательности $\{\eta_n\}$ к η при $n \to \infty$ (обозначение: $\eta_n \overset{\text{ср. кв.}}{\to} \eta$) означает, что $\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\,(\eta_n - \eta)^2 = 0$; случайная последовательность $\{\eta_n\}$ сходится в среднем квадратическом при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}\,(\eta_m - \eta_l)^2 \to 0$ при $m, l \to \infty$. Аналогично вводится понятие сходимости в среднем квадратическом для последовательности случайных векторов. Имеем при $m \geqslant l$, что

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{m} S_i(t)\xi_i - \sum_{i=1}^{l} S_i(t)\xi_i\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{i=l+1}^{m} S_i(t)\xi_i\right)^2 = \sum_{i=l+1}^{m} S_i^2(t).$$

Вспоминая свойства функций Шаудера, видим, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} S_i^2(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2^n < i \leqslant 2^{n+1}} S_i^2(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{m,l\to\infty} \sum_{i=l+1}^{m} S_i^2(t) = 0,$$

что означает требуюмую сходимость в среднем квадратическом. Поскольку и сходимость п.н., и сходимость в среднем квадратическом влекут сходимость по вероятности, то пределы правой части (4.5) в обоих случаях будут равны п.н.

Покажем справедливость свойств 1), 2), 3) определения 4.2 броуновского движения.

1) Поскольку $S_i(0) = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то $W(0) = 0$ п.н.

2) Предел в среднем квадратическом последовательности нормальных случайных векторов является нормальным случайным вектором. Поскольку для $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_m \in (0, 1]$ при $n \to \infty$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} S_i(t_1)\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} S_i(t_m)\xi_i \right\} \overset{\text{ср. кв.}}{\to} \{W(t_1), \ldots, W(t_m)\} \tag{4.6}$$

и вектор слева является нормальным, то и вектор справа является нормальным.

3) Из соотношения (4.6) следует сходимость математических ожиданий и ковариаций компонент случайного вектора в левой части, поэтому при $n \to \infty$

а) $\mathsf{E} \sum_{i=1}^{n} S_i(t)\xi_i \to \mathsf{E}W(t)$, но левая часть равна нулю, следовательно, $\mathsf{E}W(t) = 0$ при любом $t \in [0, 1]$;

б) $\mathsf{E}\big(\sum_{i=1}^{n} S_i(t_1)\xi_i\big)\big(\sum_{i=1}^{n} S_i(t_2)\xi_i\big) \to \mathsf{E}W(t_1)W(t_2)$, но левая часть равна $\sum_{i=1}^{n} S_i(t_1)S_i(t_2)$ и ее предел равен (вспомним равенство Парсеваля)

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i(t_1)S_i(t_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(H_i, I_{[0,t_1]}\right)\left(H_i, I_{[0,t_2]}\right) =$$
$$= \left(I_{[0,t_1]}, I_{[0,t_2]}\right) = \min(t_1, t_2),$$

следовательно, $\mathsf{E}W(t_1)W(t_2) = \min(t_1, t_2)$ при $t_1, t_2 \in [0, 1]$ (здесь $I_{[a,b]}(\cdot)$ – индикатор отрезка $[a, b]$).

Теорема доказана.

Замечание 4.1. Используя процедуру пополнения вероятностного пространства, на котором заданы случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$, и полагая $W(t, \omega) = 0$ при $t \in [0, 1]$ и тех ω, для которых ряд в правой части (4.5) не сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$, получаем броуновское движение, все траектории которого непрерывны. В дальнейшем будем рассматривать именно такое броуновское движение.

В заключение обсудим вопрос о построении броуновского движения при всех $t \in [0, \infty)$. Для этой цели рассмотрим последовательность независимых броуновских движений $W_1, W_2, \ldots$, заданных при $t \in [0,1]$, и положим $W(t) = W_1(t)$ при $t \in [0,1]$, $W(t) = W_1(1) + W_2\,(t-1)$ при $t \in [1,2]$, $W(t) = W_1(1) + W_2(1) + W_3\,(t-2)$ при $t \in [2,3]$ и т.д. Полученный процесс W и является броуновским движением на полуоси $[0, \infty)$ (доказательство предоставляется читателю). В связи с указанным построением уместно упомянуть так называемое *марковское свойство* броуновского движения W: для каждого $t_0 \in (0, +\infty)$ случайный процесс $\{W\,(t_0 + t) - W(t_0), t \in [0, +\infty)\}$ является броуновским движением, причем не зависящим от прошлого, т.е. процесса $\{W(t), t \in [0, t_0]\}$.

Лекция 5
Принцип инвариантности Прохорова–Донскера

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Определение 5.1. *Случайным блужданием* называется последовательность сумм

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Случайная величина X_n называется n-м *шагом* случайного блуждания. Числовые характеристики $\mathsf{E}X_1$, $\mathsf{D}X_1$ называются соответственно *сносом* и *шаговой дисперсией* случайного блуждания.

Случайные блуждания являются одним из важных объектов исследований в теории вероятностей. Так основные результаты классической теории вероятностей посвящены случайному блужданию с нулевым сносом и конечной положительной шаговой дисперсией σ^2:

1) усиленный закон больших чисел:

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{п.н.};$$

2) центральная предельная теорема:

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N,$$

где N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением;

3) закон повторного логарифма:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1 \text{ п.н.}$$

Случайные блуждания так же, как и броуновское движение, обладают *марковским свойством*: для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ случайная последовательность $\{S_{n_0+n} - S_{n_0},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ имеет такое же распределение, как $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, и не зависит от случайного вектора $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n_0}\}$.

Рассмотрим отрезок случайного блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$ и на его основе определим ступенчатую функцию $S_{\lfloor t\rfloor}$, $t \in [0, n]$

($\lfloor t\rfloor$ и $\lceil t\rceil$ означают соответственно целое приближение t в сторону уменьшения или увеличения). Множество значений этой функции совпадает с указанным отрезком блуждания.

Сожмем график этой функции вдоль оси абсцисс в n раз и вдоль оси ординат в $\sigma\sqrt{n}$ раз. При таком преобразовании мы получим график функции

$$Y_n(t) := \frac{S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0,1].$$

Заметим, что Y_n является случайным процессом с траекториями из $D[0,1]$, сохраняющим всю информацию об отрезке блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

При $t = 1$ получаем, что

$$Y_n(1) = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N.$$

Это наводит на мысль, что $Y_n \xrightarrow{D} Y$ для некоторого случайного процесса Y с траекториями из $D[0,1]$. Следующий результат получил название *принципа инвариантности Прохорова–Донскера.*

Теорема 5.1. *Если* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *то при* $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} W,$$

где W *– стандартное броуновское движение (при* $t \in [0,1]$*), знак* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0,1]$.

Доказательство разобьем на ряд лемм (доказательство первой из них предоставляется читателю).

Лемма 5.1. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *и* $\{\eta_n\}$ *– последовательности случайных величин, причем* ξ_n, η_n *– независимые случайные величины при каждом* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\{\xi_n, \eta_n\} \xrightarrow{D} \{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\},$$

где $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ *– независимые случайные величины, причем* $\tilde{\xi} \stackrel{d}{=} \xi$, $\tilde{\eta} \stackrel{d}{=} \eta$ *(знак* $\stackrel{d}{=}$ *означает совпадение распределений).*

Лемма 5.2. *Конечномерные распределения* X_n *сходятся к конечномерным распределениям* W.

Доказательство. Пусть $t \in (0,1]$. Тогда по центральной предельной теореме при $n \to \infty$

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \frac{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t}N.$$

Но

$$\sqrt{t}N \sim N\left(0,t\right) \Rightarrow \sqrt{t}N \stackrel{d}{=} W(t).$$

Пусть $0 < t_1 < t_2 \leqslant 1$. Поскольку

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},$$

случайная величина $Y_n(t_2) - Y_n(t_1)$ не зависит от $Y_n(t_1)$. Далее, при $n \to \infty$

$$Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = \frac{S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}} \frac{\sqrt{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t_2 - t_1}N.$$

Но

$$\sqrt{t_2 - t_1}N \sim N\left(0, t_2 - t_1\right) \Rightarrow \sqrt{t_2 - t_1}N \stackrel{d}{=} W(t_2) - W(t_1).$$

В силу леммы 5.1 при $n \to \infty$

$$\left\{Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1)\right\} \xrightarrow{D} \left\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1)\right\}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\left\{Y_n(t_1), Y_n(t_2)\right\} \xrightarrow{D} \left\{W(t_1), W(t_2)\right\}.$$

Аналогично рассматривается случай распределений размерности 3 и больше. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть $\delta = 1/m$, где m – натуральное число, и $t_i = i\delta$, $i = 0, 1, \ldots, m$; тогда для любого случайного процесса X с траекториями из $D[0,1]$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\left(w_X(\delta) \geqslant 3\varepsilon\right) \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \mathsf{P}\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s) - X(t_i)| \geqslant \varepsilon\right).$$

Доказательство. Пусть s, t таковы, что $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ и $|s-t| \leqslant \delta$. Тогда либо $s, t \in [t_i, t_{i+1}]$ для некоторого i и, следовательно,

$$|X(s)-X(t)| \leqslant |X(s)-X(t_i)| + |X(t)-X(t_i)| \leqslant \\ \leqslant 2 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s)-X(t_i)|;$$

либо $s \in [t_i, t_{i+1}]$, $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ для некоторого i и, следовательно,

$$|X(s)-X(t)| \leqslant |X(s)-X(t_i)| + \\ + |X(t_i)-X(t_{i+1})| + |X(t_{i+1})-X(t)| \leqslant \\ \leqslant 3 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s)-X(t_i)|.$$

Поэтому если $|s-t| \leqslant \delta$, то

$$|X(s)-X(t)| \leqslant 3 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s)-X(t_i)|.$$

Следовательно,

$$w_X(\delta) \leqslant 3 \max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s)-X(t_i)|.$$

Откуда вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(w_X(\delta) \geqslant 3\varepsilon\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\max_i \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s)-X(t_i)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \mathsf{P}\left(\sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |X(s)-X(t_i)| \geqslant \varepsilon\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1, тогда справедливо неравенство Колмогорова: при любом $\lambda > 0$*

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| \geqslant \lambda\sigma\sqrt{n}\right) \leqslant 2\mathsf{P}\left(|S_n| \geqslant (\lambda - \sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\right).$$

Доказательство. Пусть τ – момент первого достижения случайной последовательностью $\{|S_i|,\ i = 0, 1, \ldots, n\}$ полуоси $[\lambda\sigma\sqrt{n}, +\infty)$. Тогда

$$\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| \geqslant \lambda\sigma\sqrt{n}\right\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{\tau = m\},$$

причем события справа являются попарно несовместными. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right)=\\
&\quad=\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\,,|S_n|\geqslant(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\right)+\\
&\qquad+\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\,,|S_n|<(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\right)\leqslant\\
&\quad\leqslant\mathsf{P}\big(|S_n|\geqslant(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\,\big)+\\
&\qquad+\sum_{m=1}^{n-1}\mathsf{P}\big(|S_n|<(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\,,\tau=m\big).
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(|S_n|<(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\,,\tau=m\big)\leqslant\\
&\quad\leqslant\mathsf{P}\big(\tau=m,|S_n-S_m|>\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{n}\,\big)=\\
&\quad=\mathsf{P}\,(\tau=m)\,\mathsf{P}\big(|S_n-S_m|>\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{n}\,\big)
\end{aligned}$$

(здесь учтено, что случайные события $\{\tau=m\}$ и $\{|S_n-S_m|>\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{n}\,\}$ являются независимыми). По неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}\big(|S_n-S_m|>\sqrt{2}\,\sigma\sqrt{n}\,\big)\leqslant\frac{\mathsf{E}\,(S_n-S_m)^2}{2\sigma^2n}=\frac{(n-m)\,\sigma^2}{2\sigma^2n}=\frac{n-m}{2n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n-1}\mathsf{P}\big(|S_n|<(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\,,\tau=m\big)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\mathsf{P}\,(\tau=m)\leqslant\frac{1}{2}\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\mathsf{P}\big(|S_n|\geqslant(\lambda-\sqrt{2}\,)\sigma\sqrt{n}\,\big)+\frac{1}{2}\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right),
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5.5. *В условиях теоремы* 5.1 *при любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Доказательство. Из леммы 5.3 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\omega_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \mathsf{P}\biggl(\sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} |Y_n(s) - Y_n(t_i)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\biggr).$$

В силу неравенства Колмогорова

$$\mathsf{P}\biggl(\sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} |Y_n(s) - Y_n(t_i)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\biggr) =$$
$$= \mathsf{P}\biggl(\sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} \left|S_{[ns]} - S_{[nt_i]}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\sigma\sqrt{n}\biggr) =$$
$$= \mathsf{P}\left(\frac{\sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} \left|S_{[ns]} - S_{[nt_i]}\right|}{\sigma\sqrt{\lfloor nt_{i+1}\rfloor - \lfloor nt_i\rfloor}} \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lfloor nt_{i+1}\rfloor - \lfloor nt_i\rfloor}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{P}\left(\frac{\left|S_{[ns]} - S_{[nt_i]}\right|}{\sigma\sqrt{\lfloor nt_{i+1}\rfloor - \lfloor nt_i\rfloor}} \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lfloor nt_{i+1}\rfloor - \lfloor nt_i\rfloor}} - \sqrt{2}\right).$$

Последняя вероятность стремится при $n \to \infty$ к

$$\mathsf{P}\left(|N| \geqslant x_\delta\right),$$

где $N \sim N(0,1)$, $x_\delta = \varepsilon/(3\sqrt{\delta}\,) - \sqrt{2}\,$. А эта вероятность равна $2\left(1 - \Phi\left(x_\delta\right)\right)$. В лекции 4 показано (см. соотношение (4.4)), что при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\, e^{-x^2/2},$$

поэтому при достаточно малом δ

$$1 - \Phi\left(x_\delta\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_\delta}\, e^{-x_\delta^2/2}.$$

Из сказанного следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{4}{\delta\sqrt{2\pi}x_\delta}\, e^{-x_\delta^2/2}.$$

Очевидно, предел правой части равен 0 при $\delta \to 0$, что доказывает лемму.

Из лемм 5.2 и 5.5 в силу теоремы 2.3 получаем утверждение теоремы 5.1.

Лекция 6
Приложения принципа инвариатности Прохорова–Донскера

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \qquad \mathsf{E}X_1^2 = \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < +\infty. \tag{6.1}$$

Введем случайное блуждание

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Построим случайный процесс с траекториями из $D[0,1]$

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad t \in [0,1].$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера при $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{D} W, \tag{6.2}$$

где W – броуновское движение, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0,1]$ функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева на отрезке $[0,1]$, с борелевской σ-алгеброй относительно топологии Скорохода. Если f – непрерывное отображение $D[0,1]$ в $\mathbb{R}$, то по теореме 1.2 следует, что при $n \to \infty$

$$f\left(Y_n\right) \xrightarrow{D} f\left(W\right), \tag{6.3}$$

где $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в $\mathbb{R}$ с борелевской σ-алгеброй относительно стандартной топологии.

Именно соотношение (6.3) получило первоначально название *принципа инвариантности* (в термин *инвариантность* здесь вкладывается двойной смысл: неизменность относительно распределения шага случайного блуждания и неизменность относительно отображения f).

Важная проблема состоит в нахождении распределения $f\left(W\right)$. Разумеется, это можно сделать, исходя из свойств броуновского движения. Другой подход состоит в том, чтобы использовать само соотношение (6.3) для нахождения распределения $f(W)$. Именно, рассматривается простое случайное блуждание с шагом

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } 1/2; \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

Используя простой вид этого блуждания, находят явный вид предельного распределения, которое в силу (6.3) совпадает с распределением $f(W)$. Прежде, чем рассматривать примеры, усилим соотношение (6.3), усилив теорему 1.2.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – случайные элементы со значениями в метрическом пространстве S и при $n \to \infty$*

$$X_n \xrightarrow{D} X. \tag{6.4}$$

Пусть g – измеримое отображение S в метрическое пространство S' (это означает, что прообраз борелевского множества в S' является борелевским множеством в S) и C_g – множество тех элементов S, в которых отображение g непрерывно. Если $\mathsf{P}(X \in C_g) = 1$, то при $n \to \infty$

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – замкнутое множество, принадлежащее S'. Покажем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(g(X_n) \in F) \leqslant \mathsf{P}(g(X) \in F) = \mathsf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right), \tag{6.5}$$

где $g^{-1}(F)$ – прообраз F.

Пусть $[A]$ означает замыкание множества A, т.е. объединение A и всех его предельных точек. Из условия (6.4) по теореме Александрова получаем, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(g(X_n) \in F) &= \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(X_n \in g^{-1}(F)\right) \leqslant \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(X_n \in [g^{-1}(F)]\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X \in [g^{-1}(F)]\right). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(X \in [g^{-1}(F)]\right) = \mathsf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right). \tag{6.7}$$

Пусть D_g – множество элементов S, в которых отображение g разрывно (множества C_g и D_g являются борелевскими). Тогда $S = C_g + D_g$ и

$$[g^{-1}(F)] = \left[g^{-1}(F)\right] D_g + [g^{-1}(F)]C_g \subset D_g + [g^{-1}(F)]C_g. \quad (6.8)$$

Установим, что

$$[g^{-1}(F)]C_g \subset g^{-1}(F). \quad (6.9)$$

Действительно, пусть x принадлежит $[g^{-1}(F)]C_g$. Из того, что $x \in [g^{-1}(F)]$, следует, что существует такая последовательность элементов $\{x_n\}$, что $x_n \in g^{-1}(F)$ и $x_n \to x$. Кроме того, $x \in C_g$ и, следовательно, отображение g непрерывно в x и поэтому $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Но $g(x_n) \in F$ и поэтому $g(x) \in F$, т.к. F – замкнутое множество. Следовательно, $x \in g^{-1}(F)$. Итак, (6.9) доказано. Из (6.8) и (6.9) вытекает, что

$$[g^{-1}(F)] \subset D_g + g^{-1}(F).$$

Откуда получаем, что

$$\mathsf{P}\left(X \in [g^{-1}(F)]\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X \in D_g\right) + \mathsf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right) = \mathsf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right),$$

поскольку $\mathsf{P}\left(X \in Dg\right) = 0$. Противоположное неравенство

$$\mathsf{P}\left(X \in [g^{-1}(F)]\right) \geqslant \mathsf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right)$$

очевидно. Таким образом, соотношение (6.7) доказано.

Из (6.6) и (6.7) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(g\left(X_n\right) \in F\right) \leqslant \mathsf{P}\left(X \in g^{-1}(F)\right),$$

т.е. соотношение (6.5) справедливо. Теорема доказана.

Пример 6.1. Пусть $S = D[0,1]$. Рассмотрим отображение S в $\mathbb{R}$

$$g(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t).$$

Это отображение является непрерывным при всех $x \in D[0,1]$.

Действительно, если $\rho_{\text{ск}}(x,y) < \delta$, где $\delta > 0$, то существует такое непрерывное строго возрастающее отображение λ отрезка $[0,1]$ на $[0,1]$, что

$$\sup_{t\in[0,1]} |y(t) - x(\lambda(t))| < \delta, \qquad \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| < \delta.$$

Откуда, учитывая равенство $\sup_{t\in[0,1]} x(t) = \sup_{t\in[0,1]} x(\lambda(t))$, находим, что

$$|g(y)-g(x)| = \left|\sup_{t\in[0,1]} y(t) - \sup_{t\in[0,1]} x(t)\right| = \\ = \left|\sup_{t\in[0,1]} y(t) - \sup_{t\in[0,1]} x(\lambda(t))\right| \leqslant \\ \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |y(t)-x(\lambda(t))| < \delta,$$

т.е. отображение g непрерывно в точке x.

Пример 6.2. Пусть $S = D[0,1]$. Рассмотрим отображение S в $\mathbb{R}$

$$h(x) = \lambda\left(\{t\colon t\in[0,1],\ x(t)>0\}\right),$$

где $\lambda(A)$ – мера Лебега борелевского множества $A\subset\mathbb{R}$. Можно показать, что это отображение является измеримым и п.н. непрерывным на траекториях броуновского движения, т.е.

$$P\left(W\in C_h\right) = 1.$$

Перейдем теперь к следствиям принципа инвариантности Прохорова–Донскера. Положим

$$M_n = \max_{0\leqslant i\leqslant n} S_i.$$

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0<\sigma^2<+\infty$. *Тогда при всех* $x\geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Доказательство. Ввиду принципа инвариантности Прохорова–Донскера и непрерывности функционала

$$g(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t), \qquad x\in D[0,1],$$

по теореме 6.1 получаем, что при $n\to\infty$

$$\sup_{t\in[0,1]} Y_n(t) \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} W(t).$$

Заметим, что

$$\sup_{t\in[0,1]} Y_n(t) = \frac{\sup_{t\in[0,1]} S_{\lfloor nt\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Итак, при $n\to\infty$

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} W(t). \tag{6.10}$$

Осталось найти распределение правой части (6.10).

Лемма 6.1. *В случае простого случайного блуждания при всех $x \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\left(M_n \geqslant x\right) = 2\mathsf{P}\left(S_n > x\right) + \mathsf{P}\left(S_n = x\right).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть натуральное x. Очевидно, что

$$\mathsf{P}\left(M_n \geqslant x\right) = \mathsf{P}\left(S_n = x\right) + \mathsf{P}\left(S_n > x, M_n \geqslant x\right) + \mathsf{P}\left(S_n < x, M_n \geqslant x\right).$$

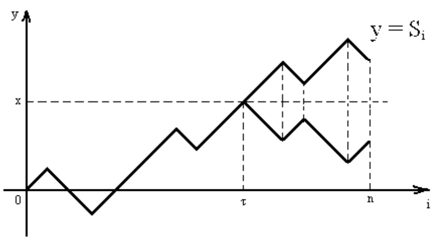

Рис. 3.

Заметим, что число траекторий $S_0, S_1, \ldots, S_n$, удовлетворяющих условию $\{S_n > x,\ M_n \geqslant x\}$ совпадает с числом траекторий, удовлетворяющих условию $\{S_n < x,\ M_n \geqslant x\}$. Действительно (см. рис. 3), если $M_n \geqslant x$, то существует момент τ первого достижения значения x отрезком случайного блуждания

$S_0, S_1, \ldots, S_n$; число траекторий, ведущих за время $n-\tau$ из точки x в точки, лежащие не ниже x, совпадает с числом траекторий, ведущих в точки, лежащие не выше x.

Вероятность каждой траектории $S_0, S_1, \ldots, S_n$ равна 2^{-n}, поэтому

$$\mathsf{P}\left(S_n > x, M_n \geqslant x\right) = \mathsf{P}\left(S_n < x, M_n \geqslant x\right).$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(M_n \geqslant x\right) = 2\mathsf{P}\left(S_n > x, M_n \geqslant x\right) + \mathsf{P}\left(S_n = x\right).$$

Откуда, учитывая, что $\{S_n > x,\ M_n \geqslant x\} = \{S_n > x\}$, получаем утверждение леммы.

В случае простого случайного блуждания из леммы 6.1 и центральной предельной теоремы находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant x\right) = 2\left(1 - \Phi(x)\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Таким образом, функция распределения правой части (6.10) равна $1 - 2\left(1-\Phi(x)\right) = 2\Phi(x) - 1$, что завершает доказательство теоремы.

Установим теперь *закон арксинуса для случайных блужданий.*

Теорема 6.3. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при всех* $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{|\{i\colon 0 \leqslant i \leqslant n,\ S_i > 0\}|}{n} \leqslant x\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

(*здесь* $|A|$ *означает мощность множества* A).

Доказательство. В силу принципа инвариантности Прохорова–Донскера и непрерывности функционала $h(x) = \lambda(\{t\colon t \in [0,1],\ x(t) > 0\})$ на траекториях броуновского движения по теореме 6.1 получаем, что при $n \to \infty$

$$\lambda\left(\{t\colon t \in [0,1],\ X_n(t) > 0\}\right) \xrightarrow{D} \lambda\left(\{t\colon t \in [0,1],\ W(t) > 0\}\right).$$

Заметим, что

$$\lambda\left(\{t\colon t \in [0,1],\ X_n(t) > 0\}\right) = \frac{|\{i\colon 0 \leqslant i \leqslant n-1,\ S_i > 0\}|}{n}.$$

Итак, при $n \to \infty$

$$\frac{|\{i\colon 0 \leqslant i \leqslant n,\ S_i > 0\}|}{n} \xrightarrow{D} \lambda\left(\{t\colon t \in [0,1],\ W(t) > 0\}\right). \qquad (6.11)$$

Осталось найти распределение правой части (6.11).

Рассмотрим непрерывную функцию, построенную на основе отрезка случайного блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_n$:

$$Y_n^*(t) = S_i + (t-i)\left(S_{i+1} - S_i\right), \quad t \in [i, i+1], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [7, т. 1, гл. 3, § 4].

Лемма 6.2. *В случае простого случайного блуждания при* $k = 0, 1, \ldots, n$ *справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\big(\lambda\left(\{t\colon t \in [0,2n],\ Y_{2n}^*(t) > 0\}\right) = 2k\big) = u_{2k}u_{2n-2k},$$

где $u_{2k} = C_{2k}^k 2^{-2k}$.

Используя формулу Стирлинга, нетрудно показать, что при $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k \leqslant xn} u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Рассмотрим простое случайное блуждание. Из леммы 6.2 и последнего соотношения получаем, что при $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(\lambda\left(\{t\colon t \in [0,n], Y_n^*(t) > 0\}\right) \leqslant xn\big) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant \lambda\left(\{t\colon t \in [0,n], Y_n^*(t) > 0\}\right) n - |\{i\colon 0 \leqslant i \leqslant n,\ S_i > 0\}| \leqslant \\ \leqslant |\{i\colon 0 \leqslant i \leqslant n,\ S_i = 0\}|.$$

Последнее выражение имеет порядок $\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ (см. [7, т. 1, гл. 3, § 7, теорема 4]). Отсюда следует, что в случае простого случайного блуждания при $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(|\{i\colon 0 \leqslant i \leqslant n,\ S_i > 0\}| \leqslant xn\big) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Итак, функция распределения правой части (6.11) равна $(2/\pi)\arcsin\sqrt{x}$. Теорема доказана.

Лекция 7
Распределение минимума, максимума и положения в последний момент броуновского движения. Броуновский мост

Положим

$$m_n = \min_{0\leqslant i\leqslant n} S_i, \qquad M_n = \max_{0\leqslant i\leqslant n} S_i,$$
$$m = \inf_{t\in[0,1]} W(t), \qquad M = \sup_{t\in[0,1]} W(t).$$

Пусть N означает случайную величину со стандартным нормальным распределением.

Теорема 7.1. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\{m_n, M_n, S_n\} \xrightarrow{D} \{m, M, W(1)\}, \tag{7.1}$$

причем при любых a, b, u, v *таких, что* $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a \leqslant u < v \leqslant b$, *справедливо равенство*

$$\mathsf{P}(a < m \leqslant M < b, u < W(1) < v) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)) -$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)\right). \tag{7.2}$$

Доказательство. Отображение $x \to \sup_{t\in[0,1]} x(t)$, $x \in D[0,1]$, является непрерывным при всех $x \in D[0,1]$ (см. лекцию 6). Аналогичные утверждения справедливы для отображений $x \to \inf_{t\in[0,1]} x(t)$ и $x \to x(1)$, $x \in D[0,1]$. Поэтому непрерывно при всех $x \in D[0,1]$ следующее отображение $D[0,1]$ в $\mathbb{R}^3$:

$$x \to \left\{\inf_{t\in[0,1]} x(t), \sup_{t\in[0,1]} x(t), x(1)\right\}.$$

Откуда в силу принципа инвариантности Прохорова–Донскера и по теореме 6.1 предыдущей лекции получаем утверждение (7.1) доказываемой теоремы.

Для доказательства (7.2) нам потребуется следующий результат. Положим

$$p_n(a,b,v) = \mathsf{P}(a < m_n \leqslant M_n < b, S_n = v), p_n(j) = \mathsf{P}(S_n = j).$$

Лемма 7.1. *В случае простого случайного блуждания при любых целых a, b, v таких, что $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a < b$, $a \leqslant v \leqslant b$, справедливо равенство*

$$p_n(a,b,v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n(v + 2k(b-a)) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n(2b - v + 2k(b-a)), \tag{7.3}$$

причем оба ряда в правой части сходятся при $a < b$.

Доказательство. Воспользуемся принципом математической индукции. Если $n = 0$, то $p_n(a,b,v) = 1$ при $v = 0$ и $p_n(a,b,v) = 0$ при $v \neq 0$. То же справедливо и для правой части (7.3). Обозначим равенство (7.3) через $[n,a,b,v]$. Предположим справедливость $[n-1,a,b,v]$ при любых a, b, v таких, что $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a < b$, $a \leqslant v \leqslant b$, и покажем справедливость $[n,a,b,v]$. Пусть сначала $a = 0$, тогда и левая, и правая части (7.3) обращаются в 0 (правая – поскольку $p_n(j) = p_n(-j)$ при любых целых j). Аналогично рассматривается случай $b = 0$. Пусть теперь $a \leqslant -1$, $b \geqslant 1$. Тогда справедливы $[n-1, a-1, b-1, v-1]$ и $[n-1, a+1, b+1, v+1]$. Теперь заметим, что по формуле полной вероятности

$$p_n(a,b,v) = \frac{1}{2} p_{n-1}(a+1, b+1, v+1) + \frac{1}{2} p_{n-1}(a-1, b-1, v-1), \tag{7.4}$$

$$p_n(j) = \frac{1}{2} p_{n-1}(j-1) + \frac{1}{2} p_{n+1}(j+1). \tag{7.5}$$

Выписывая выражения для двух слагаемых в правой части (7.4) в соответствии с (7.3) и используя (7.5), получаем справедливость $[n,a,b,v]$. Лемма доказана.

Рассмотрим простое случайное блуждание. Из леммы 7.1 следует, что если $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a \leqslant u < v \leqslant b$, то

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(a < m_n \leqslant M_n < b, u < S_n < v) = \\
&\qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}(u + 2k(b-a) < S_n < v + 2k(b-a)) - \\
&\qquad\quad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(2b - v + 2k(b-a) < S_n < 2b - u + 2k(b-a)\right).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись центральной предельной теоремой для каждого члена этих двух рядов и оценками для хвостов этих рядов (например,

$$\sum_{k=L}^{+\infty} \mathsf{P}\big(u + 2k(b-a) < S_n < v + 2k(b-a)\big) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}\big(S_n > u + 2L(b-a)\big),$$

при $L \in \mathbb{N}$) получаем, что при $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a \leqslant u < v \leqslant b$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(a < \frac{m_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} < b, u < \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < v\right) = \\
&\qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)) - \\
&\qquad\quad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\big(2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)\big).
\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (7.2) и теорема доказаны.

Следствие 7.1. *При $u < v \leqslant b$, $b \geqslant 0$*

$$\mathsf{P}(M < b, u < W(1) < v) = \mathsf{P}(u < N < v) - \mathsf{P}(2b - v < N < 2b - u).$$

При $a \leqslant 0$, $a \leqslant u < v$

$$\mathsf{P}(a < m, u < W(1) < v) = \mathsf{P}(u < N < v) - \mathsf{P}(2a - v < N < 2a - u).$$

При $a \leqslant 0 \leqslant b$

$$\mathsf{P}(a < m \leqslant M < b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \mathsf{P}\big(a + k(b-a) < N < b + k(b-a)\big).$$

Эти результаты, касающиеся броуновского движения, позволяют изучить свойства таких случайных процессов как *броуновский мост*, *броуновская извилина* и *броуновская экскурсия.* Названные процессы тесно связаны с броуновским движением и играют важную роль в дальнейшем. Начнем с первого из них.

Определение 7.1. Случайный процесс $\{W_0(t), t \in [0,1]\}$ называется *броуновским мостом*, если

1) $W_0(0) = 0$ п.н.;
2) все конечномерные распределения нормальны;
3) $\mathsf{E}W_0(t) = 0$, $\mathsf{E}W_0(s)W_0(t) = s(1-t)$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$;
4) траектории W_0 п.н. непрерывны.

Заметим, что $W_0(1) = 0$ п.н. В качестве примера броуновского моста можно рассмотреть процесс $W(t) - tW(1)$, $t \in [0,1]$, где W – броуновское движение. Условия 1), 2) и 4) выполняются. Далее, при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(W(t) - tW(1)\right) = 0,\\
&\mathsf{E}(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)) =\\
&\qquad = \mathsf{E}W(s)W(t) - t\mathsf{E}W(s)W(1) - s\mathsf{E}W(1)W(t) + st\mathsf{E}W^2(1) =\\
&\qquad = s(1-t).
\end{aligned}
$$

Как и в случае броуновского движения, будем считать, что все траектории броуновского моста являются непрерывными.

Пусть X – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Пусть $A \in \mathscr{F}$ и $\mathsf{P}(A) > 0$. Обозначим $\{X \,|\, A\}$ случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(A, \mathscr{F} \cap A, \mathsf{P}(\cdot \,|\, A))$, где $\mathsf{P}(\cdot \,|\, A)$ – условная вероятностная мера ($\mathsf{P}(B \,|\, A) = \mathsf{P}(AB)/\mathsf{P}(A)$ при $B \in \mathscr{F} \cap A$) и определяемый формулой

$$\{X \,|\, A\}(\omega) = X(\omega), \qquad \omega \in A.$$

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_\varepsilon = \{W \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon\}.$$

Теорема 7.2. *При* $\varepsilon \to 0$

$$W_\varepsilon \xrightarrow{D} W_0,$$

где знак $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в* $C[0,1]$.

Доказательство. Возьмем в качестве W_0 процесс $\{W(t) - tW(1),\ t \in [0,1]\}$. Пусть m – натуральное число и $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant 1$. Случайный вектор $\{W_0(t_1), W_0(t_2), \ldots, W_0(t_m)\}$ не зависит от $W(1)$. Действительно, рассмотрим случайный вектор $\{W_0(t_1), \ldots, W_0(t_m), W(1)\}$. Он является нормальным. Поэтому независимость $W(1)$ от остальных компонент равносильна равенствам

$$\operatorname{cov}(W(1), W_0(t_i)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Проверим их:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(W(1), W_0(t_i)) &= \operatorname{cov}(W(1), W(t_i) - t_iW(1)) = \\ &= \mathsf{E}W(1)W(t_i) - t_i\mathsf{E}W^2(1) = 0.\end{aligned}$$

Из доказанного следует, что случайная величина $W(1)$ не зависит от случайного события $\{W_0 \in A\}$ для любого множества A из цилиндрической σ-алгебры в пространстве $C[0,1]$. Можно показать, что эта σ-алгебра совпадает с борелевской σ-алгеброй в $C[0,1]$ относительно равномерной топологии. Поэтому для любого борелевского множества A из $C[0,1]$

$$\mathsf{P}(W_0 \in A \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) = \mathsf{P}(W_0 \in A). \tag{7.6}$$

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое множество F из $C[0,1]$. Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathsf{P}(W \in F \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}(W_0 \in F). \tag{7.7}$$

Если $0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon$ и $W \in F$, то $W_0 \in F_\varepsilon = \{x\colon \rho_{\text{равн}}(x, F) \leqslant \varepsilon\}$. Откуда с учетом (7.6) получаем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(W \in F \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) &\leqslant \mathsf{P}(W_0 \in F_\varepsilon \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) = \\ &= \mathsf{P}(W_0 \in F_\varepsilon).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathsf{P}(W \in F \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) &\leqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \mathsf{P}(W_0 \in F_\varepsilon) = \\ &= \mathsf{P}(W_0 \in F).\end{aligned}$$

Последнее равенство объясняется тем, что множества F_ε убывают с уменьшением ε и $\bigcap_\varepsilon F_\varepsilon = F$. Итак, соотношение (7.7) и теорема доказаны.

Теорема 7.3. *Броуновский мост является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$p_0\left(s,x;t,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2t(1-t)}\right), \\ \qquad 0=s<t<1,\quad x=0,\quad y\in\mathbb{R}; \\ \sqrt{\dfrac{1-s}{2\pi(t-s)(1-t)}}\exp\left(-\dfrac{((1-s)y-(1-t)x)^2}{2(1-s)(t-s)(1-t)}\right), \\ \qquad 0<s<t<1,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Доказательство. Требуется показать, что для произвольных чисел $m\in\mathbb{N}$, $t_1,t_2,\ldots,t_m$ таких, что $0<t_1<t_2<\cdots$ $\cdots<t_m\leqslant 1$, и $a_1,a_2,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\big(W_0(t_i)\leqslant a_i, i=1,\ldots,m\big) &=\\ =\int\cdots\int_{G(a_1,\ldots,a_m)} &p_0(0,0;t_1,x_1)\times\\ &\times p_0(t_1,x_1;t_2,x_2)\ldots p_0(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\,dx_1\ldots dx_m,\end{aligned}\tag{7.8}$$

где $G\left(a_1,\ldots,a_m\right)=\{(x_1,x_2,\ldots,x_m):x_1\leqslant a_1,\ldots,x_m\leqslant a_m\}$. Броуновское движение является марковским процессом с переходной плотностью

$$p\left(s,x;t,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}},$$
$$0\leqslant s<t<+\infty,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}.$$

Поэтому по теореме 7.2, учитывая, что случайный вектор $\{W_0(t_1),$ $\ldots,W_0(t_m)\}$ принадлежит границе множества $G\left(a_1,\ldots,a_m\right)$ с нулевой вероятностью, получаем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(W_0(t_i)\leqslant a_i, i=1,\ldots,m\right) &=\\ =\lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{P}\big(W(t_i)\leqslant a_i, i=1,\ldots,m\;\big|\;0\leqslant W(1)\leqslant\varepsilon\big) &=\\ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mathsf{P}(0\leqslant W(1)\leqslant\varepsilon)}&\times\\ \times\,\mathsf{P}\left(W(t_i)\leqslant a_i, i=1,\ldots,m; 0\leqslant W(1)\leqslant\varepsilon\right) &=\end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\mathsf{P}(0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon)} \times$$
$$\times \int_0^{\varepsilon} dx_{m+1} \int \cdots \int_{G(a_1,\ldots,a_m)} p(0,0;t_1,x_1)\times$$
$$\times\, p\,(t_1,x_1;t_2,x_2)\ldots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\times$$
$$\times\, p(t_m,x_m;1,x_{m+1})\,dx_1\ldots dx_m =$$
$$= \int \cdots \int_{G(a_1,\ldots,a_m)} p(0,0;t_1,x_1)\ldots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\times$$
$$\times \frac{p(t_m,x_m;1,0)}{p(0,0;1,0)}\,dx_1\ldots dx_m.$$

Нетрудно показать, что в последнем интеграле подынтегральное выражение совпадает с подынтегральным выражением в правой части (7.8). Пусть, например, $m = 1$, тогда

$$p(0,0;t_1,x_1)\frac{p(t_1,x_1;1,0)}{p(0,0;1,0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\,e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-t_1}}\,e^{-\frac{x_1^2}{2(1-t_1)}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1(1-t_1)}}\,e^{-\frac{x_1^2}{2t_1(1-t_1)}} = p_0(0,0;t_1,x_1).$$

Теорема доказана.

Теорема 7.4. *Для любого $x \geqslant 0$ выполняется равенство*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |W_0(t)| \leqslant x\Big) = K(x),$$

где $K(x)$ – функция распределения Колмогорова, т.е.

$$K(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}, \qquad x > 0.$$

Доказательство. Очевидно, при $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |W_0(t)| \leqslant x\Big) = \mathsf{P}\Big(-x \leqslant \inf_{t\in[0,1]} W_0(t) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} W_0(t) \leqslant x\Big).$$

По теореме 7.2

$$\mathsf{P}\Big(-x \leqslant \inf_{t\in[0,1]} W_0(t) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} W_0(t) \leqslant x\Big) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}(-x \leqslant m \leqslant M \leqslant x \,|\, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}(-x \leqslant m \leqslant M \leqslant x, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon)/\mathsf{P}(0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon). \tag{7.9}$$

По теореме 7.1

$$\mathsf{P}(-x \leqslant m \leqslant M \leqslant x, 0 \leqslant W(1) \leqslant \varepsilon) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(4kx < N < \varepsilon + 4kx\right) -$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(2x - \varepsilon + 4kx < N < 2x + 4kx\right). \tag{7.10}$$

Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathsf{P}\left(a < N < a + \varepsilon\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{2}},$$

поэтому, ввиду (7.10), правая часть (7.9) равна

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2(2kx)^2} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2((2k+1)x)^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}.$$

Теорема доказана.

Лекция 8
Локальные предельные теоремы Гнеденко и Стоуна

В этой лекции рассматриваются классические результаты теории вероятностей, играющие существенную роль в дальнейшем. Теорему Гнеденко изучают в стандартных университетских курсах, теореме Стоуна (см. [25]) повезло меньше, хотя она весьма востребована в современной теории вероятностей, особенно в теории больших уклонений для случайных блужданий. Приведем доказательства обеих теорем (первой – потому что элементы ее доказательства используются при доказательстве второй).

Определение 8.1. Распределение случайной величины X называется *решетчатым*, если существуют такие числа $a \in \mathbb{R}$ и $h > 0$, что возможные значения X есть $a + hm$, $m \in \mathbb{Z}$. Число h называется *шагом распределения*. Максимальное из возможных значений h (при всевозможных a) называется *максимальным шагом распределения*. Обозначим его h_0. Если при этом возможные значения X_1 есть $h_0 m$, $m \in \mathbb{Z}$, то распределение называется *центрально решетчатым* (с максимальным шагом h_0). Все распределения, не являющиеся решетчатыми, называются *нерешетчатыми*.

Доказательство следующей леммы можно найти в [7, т. 2, гл. 15, § 1].

Лемма 8.1. *Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X. Распределение случайной величины X является нерешетчатым тогда и только тогда, когда $|\varphi(t)| < 1$ при любом $t \neq 0$. Если $|\varphi(\lambda)| = 1$ при некотором $\lambda > 0$ и $|\varphi(t)| < 1$ при $t \in (0, \lambda)$, то распределение случайной величины X является решетчатым с максимальным шагом $2\pi/\lambda$. Если $|\varphi(t)| = 1$ в правой окрестности точки 0 (и, следовательно, при всех $t \in \mathbb{R}$), то распределение случайной величины X является вырожденным, т.е. $X = C$ п.н., где C – некоторая постоянная.*

Теорема 8.1 (Гнеденко). *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые случайные величины с максимальным шагом h, причем $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$,*

$0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}} \left| \sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}\left(S_n = xh\right) - \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{xh}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} \right| = 0.$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $h = 1$. Положим при $x \in \mathbb{Z}$

$$z = \frac{x}{\sigma\sqrt{n}}, P_n(x) = \mathsf{P}(S_n = x).$$

Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X_1. Тогда характеристическая функция случайной величины S_n равна $\varphi^n(t)$ и

$$\varphi^n(t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P_n(x) e^{itx}.$$

По формуле Фурье

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(t) e^{-itx}\, dt.$$

Поскольку $x = \sigma\sqrt{n}\, z$, то

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(t) e^{-it\sigma\sqrt{n}\, z}\, dt.$$

Сделаем замену $y = t\sigma\sqrt{n}$, тогда

$$\sigma\sqrt{n}\, P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} \varphi^n\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-iyz}\, dy.$$

Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyz}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Представим выражение

$$2\pi\left(\sigma\sqrt{n}\, P_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$$

в виде суммы четырех интегралов при $A > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$I_1 = \int_{|y|\leqslant A} e^{-iyz} \left[\varphi^n\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{y^2}{2}}\right] dy,$$
$$I_2 = -\int_{A\leqslant|y|} e^{-iyz}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy,$$
$$I_3 = \int_{A\leqslant|y|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-iyz}\varphi^n\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right) dy,$$
$$I_4 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n}\leqslant|y|\leqslant\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-iyz}\varphi^n\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right) dy.$$

1) Очевидно, что

$$|I_2| \leqslant \int_{A\leqslant|y|} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy,$$

а последний интеграл становится малым при больших A.

2) По условию теоремы

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o\left(t^2\right), \qquad t \to 0.$$

Поэтому существует такое число $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$

$$|\varphi(t)| < 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4} \leqslant e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}}.$$

Следовательно,

$$|I_3| \leqslant \int_{A\leqslant|y|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}} \left|\varphi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n\right| dy \leqslant \int_{A\leqslant|y|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy.$$

Последний интеграл становится малым при больших A.

3) По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{y^2}{2}},$$

причем эта сходимость равномерна по y, принадлежащим произвольному конечному отрезку. Отсюда следует, что интеграл I_1 становится малым при фиксированном A и больших n.

4) Наконец,

$$|I_4| \leqslant \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n} \leqslant |y| \leqslant \pi\sigma\sqrt{n}} \left|\varphi\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^n dy = \sigma\sqrt{n} \int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} |\varphi(t)|^n \, dt.$$

По лемме 8.1 $|\varphi(t)| < 1$ при $0 < t < 2\pi$, поэтому

$$\max_{\varepsilon \leqslant t \leqslant \pi} |\varphi(t)| := q < 1.$$

Следовательно,

$$|I_4| \leqslant \sigma\sqrt{n}\, q^n 2\pi,$$

а правая часть мала при больших n.

Теорема доказана.

Теорема 8.2 (Стоун). *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Если распределение случайной величины X_1 является нерешетчатым, то при $n \to \infty$*

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right]\right) = \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1)\right)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число.

Доказательство. Рассмотрим плотность вероятностей

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2.$$

Ее преобразование Фурье равно

$$k(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1; \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

Введем при $a > 0$ семейство плотностей вероятностей

$$K_a(x) = \frac{1}{a} K\left(\frac{x}{a}\right),$$

преобразование Фурье которых равно

$$k_a(t) = k(at).$$

Лемма 8.2. *Пусть X – произвольная случайная величина, $f(t)$ – ее характеристическая функция, $P(x;h) = \mathsf{P}(X \in (x, x+h])$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x;h)e^{itx}\,dx = \frac{1-e^{-ith}}{it}f(t).$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X, тогда

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} P(x;h)e^{itx}\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(x+h)-F(x)\right]e^{itx}\,dx = \\ &= \frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(x+h)-F(x)\right]\,de^{itx} = \\ &= \frac{1}{it}\left[F(x+h)-F(x)\right]e^{itx}\big|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &\quad - \frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,d\left[F(x+h)-F(x)\right] = \\ &= \frac{1}{it}f(t) - \frac{e^{-ith}}{it}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x+h)}\,dF(x+h) = \\ &= \frac{1}{it}f(t) - \frac{e^{-ith}}{it}f(t) = \frac{1-e^{-ith}}{it}f(t).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины X_1, положим $P_n\left(x;h\right) = \mathsf{P}\left(S_n/\left(\sigma\sqrt{n}\right) \in (x, x+h]\right)$, тогда из леммы 8.2 следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n\left(x;h\right)e^{itx}\,dx = \frac{1-e^{-ith}}{it}\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Рассмотрим свертку функций $K_a(x)$ и $P_n\left(x;h\right)$:

$$V_n\left(x;h,a\right) := \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(y)P_n\left(x-y;h\right)\,dy.$$

Ее преобразование Фурье равно произведению преобразований Фурье функций $K_a(x)$ и $P_n\left(x;h\right)$. Поэтому по формуле обращения для преобразований Фурье

$$V_n\left(x;h,a\right) = \frac{h}{2\pi}\int_{|t|\leqslant 1/a} e^{-itx}k_a(t)\frac{1-e^{-ith}}{ith}\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\,dt. \quad (8.1)$$

Еще раз запишем формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{8.2}$$

Положим

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 8.3. *Если распределение случайной величины X_1 является нерешетчатым, то при $h = c_1/\left(\sigma\sqrt{n}\,\right)$, $a = c_2/\left(\sigma\sqrt{n}\,\right)$, где c_1, c_2 – положительные постоянные,*

$$V_n\left(x; h, a\right) = h\left(p(x) + o(1)\right), \qquad n \to \infty.$$

Это соотношение выполняется равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В силу формул (8.1) и (8.2) выражение

$$(2\pi/h)\, V_n\left(x, h, a\right) - 2\pi p(x)$$

можно представить как сумму четырех интегралов при $A > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$I_1 = \int_{|t|\leqslant A} e^{-itx} \left[k_a(t)\frac{1-e^{-ith}}{ith}\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right] dt,$$
$$I_2 = -\int_{|t|\geqslant A} e^{-itx}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$
$$I_3 = \int_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} k_a(t)\frac{1-e^{-ith}}{ith}\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt,$$
$$I_4 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n}\,\leqslant|t|\leqslant 1/a} e^{-itx} k_a(t)\frac{1-e^{-ith}}{ith}\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt.$$

1) Оценка I_2 производится так же, как в теореме 8.1.
2) Поскольку

$$|k_a(t)| \leqslant 1, \qquad \left|\frac{1-e^{-ith}}{ith}\right| \leqslant 1,$$

то

$$|I_3| \leqslant \int_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}} \left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^n dt.$$

Оценка последнего интеграла производится так же, как в теореме 8.1.

3) Ясно, что

$$k_a(t) = 1 + o(1), \quad a \to 0,$$
$$\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}} + o(1), \quad n \to \infty,$$
$$\left|\frac{1-e^{-ith}}{ith} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|th| \Longrightarrow \frac{1-e^{-ith}}{ith} = 1 + o(1), \quad h \to 0,$$

причем все эти соотношения выполняются равномерно по $t \in [-A, A]$. Поэтому

$$I_1 = o(1), \quad n \to \infty.$$

4) Так как по лемме 8.1 $|\varphi(t)| < 1$ при $t \neq 0$, то

$$\max_{\varepsilon \leqslant t \leqslant 1/c_2} |\varphi(t)| := q < 1,$$

поэтому

$$|I_4| \leqslant \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n} \leqslant |t| \leqslant 1/a} \left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^n dt =$$
$$= \sigma\sqrt{n} \int_{\varepsilon \leqslant |u| \leqslant 1/c_2} |\varphi(u)|^n\, du \leqslant \sigma\sqrt{n}\, q^n \frac{2}{c_2} = o(1), \quad n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется показать, что существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant n_0$, $x \in \mathbb{R}$, $\Delta \in (0, b)$ (b – произвольное фиксированное положительное число)

$$\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\,(p(x) - \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \leqslant \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\,(p(x) + \varepsilon)\,. \tag{8.3}$$

Пусть $p_0 = \max_{x\in\mathbb{R}} p(x)$. Функция $p(x)$ равномерно непрерывна (поскольку $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = 0$), поэтому существует такое число h_1 из интервала $(0, 1)$, что $|p(x) - p(y)| \leqslant \varepsilon/4$ при $|x - y| \leqslant h_1$. Подберем число δ так, чтобы $0 < \delta < 1/6$ и при $\varepsilon_1 = 2\delta$, $\varepsilon_2 = \int_{|x|\geqslant 1/\delta} K(x)\, dx$ выполнялись неравенства

$$\frac{p_0 + p_0\varepsilon_1 + \varepsilon/2}{1 - \varepsilon_2} - p_0 \leqslant \varepsilon, \qquad p_0\varepsilon_1 + (p_0 + \varepsilon)\,\varepsilon_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.4}$$

Пусть $h = \Delta / \left(\sigma\sqrt{n}\,\right)$. По лемме 8.3 существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant n_0$, во-первых,

$$V_n\left(x-\delta h; h\left(1+2\delta\right), \delta^2 h\right) \leqslant h\left(1+2\delta\right) p\left(x-\delta h\right) + \frac{\varepsilon h}{6} \leqslant$$
$$\leqslant h\left(1+2\delta\right)\left(p(x)+\frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon h}{6} \leqslant h\left(p(x)+\varepsilon_1 p_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (8.5)$$

Здесь учтено, что

$$(1+2\delta)\left(p(x)+\frac{\varepsilon}{4}\right)+\frac{\varepsilon}{6} = p(x)+2\delta p\left(x\right)+\frac{\delta\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{6} \leqslant p(x)+\varepsilon_1 p_0+\frac{\varepsilon}{2}.$$

А во-вторых,

$$V_n\left(x+\delta h, h\left(1-2\delta\right), \delta^2 h\right) \geqslant h\left(1-2\delta\right) p\left(x+\delta h\right) - \frac{\varepsilon h}{4} \geqslant$$
$$\geqslant h\left(1-2\delta\right)\left(p(x)-\frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon h}{4} \geqslant h\left(p(x)-\varepsilon_1 p_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (8.6)$$

Здесь учтено, что

$$(1-2\delta)\left(p(x)-\frac{\varepsilon}{4}\right)-\frac{\varepsilon}{4} = p(x)-2\delta p(x)+\frac{\delta\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2} \geqslant p(x)-2\delta p_0-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что при $|y| \leqslant \delta h$

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x-\delta h-y, x-\delta h-y+h\left(1+2\delta\right)\right]\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x+h\right]\right), \quad (8.7)$$
$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x+\delta h-y, x+\delta h-y+h\left(1-2\delta\right)\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x+h\right]\right). \quad (8.8)$$

Поэтому, вспоминая определение функций $V_n\left(x; h, a\right)$ и $P_n\left(x; h\right)$ и учитывая (8.7), находим, что

$$V_n\left(x-\delta h; h\left(1+2\delta\right), \delta^2 h\right) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{|y|\leqslant\delta h} K_{\delta^2 h}(y) P_n\left(x-\delta h-y; h\left(1+2\delta\right)\right)\, dy \geqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h]\right) \int_{|y|\leqslant\delta h} K_{\delta^2 h}(y)\, dy \geqslant \\
&\geqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h]\right)(1-\varepsilon_2)\,; \qquad (8.9)
\end{aligned}
$$

последнее неравенство объясняется тем, что

$$
\begin{aligned}
\int_{|y|>\delta h} K_{\delta^2 h}(y)\, dy &= \int_{|y|>\delta h} K\left(\frac{y}{\delta^2 h}\right)\frac{1}{\delta^2 h}\, dy = \\
&= \int_{|u|>1/\delta} K(u)\, du = \varepsilon_2. \qquad (8.10)
\end{aligned}
$$

Из (8.4),(8.5) и (8.9) следует, что

$$
\mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h]\right) \leqslant \frac{h\left(p(x)+p_0\varepsilon_1+\varepsilon/2\right)}{1-\varepsilon_2} \leqslant h\left(p(x)+\varepsilon\right). \qquad (8.11)
$$

Аналогично, учитывая (8.8), (8.10) и (8.11), получаем, что

$$
\begin{aligned}
&V_n\left(x+\delta h; h\left(1-2\delta\right), \delta^2 h\right) = \\
&\quad= \int_{|y|\leqslant\delta h} K_{\delta^2 h}(y) P_n\left(x+\delta h-y; h\left(1-2\delta\right)\right) dy + \int_{|y|>\delta h} \cdots \leqslant \\
&\quad\leqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h]\right) \int_{|y|\leqslant\delta h} K_{\delta^2 h}(y)\, dy + \\
&\qquad\quad + \left(p_0+\varepsilon\right) h \int_{|y|>\delta h} K_{\delta^2 h}(y)\, dy \leqslant \\
&\quad\leqslant \mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h]\right) + \varepsilon_2\left(p_0+\varepsilon\right) h. \qquad (8.12)
\end{aligned}
$$

Из (8.4), (8.6) и (8.12) получаем, что

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in (x, x+h]\right) &\geqslant h\left(p(x)-\varepsilon_1 p_0-\varepsilon_2\left(p_0+\varepsilon\right)-\frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \\
&\geqslant h\left(p(x)-\varepsilon\right). \qquad (8.13)
\end{aligned}
$$

Из соотношений (8.11) и (8.13) следует (8.3). Теорема доказана.

Теоремы 8.1 и 8.2 можно объединить в одну, которую также называют *теоремой Стоуна.*

Теорема 8.3. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины, причем* $\mathsf{E}X_1 = 0, \mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Если распределение случайной величины* X_1 *является центрально решетчатым или нерешетчатым, то при* $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right]\right) = \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1)\right)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ *и* $\Delta \in (0, b)$, *где* b *– произвольное положительное число (в решетчатом случае* Δ *кратно максимальному шагу распределения* X_1*).*

Смысл этой теоремы очень прост: распределение случайной величины $S_n/(\sigma\sqrt{n}\,)$ при больших n мало отличается от стандартного нормального, поэтому

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \approx p(x)\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $p(x)$ – плотность вероятностей стандартного нормального закона.

Лекция 9
Принцип инвариантности Лиггетта

Наряду с принципом инвариантности Прохорова–Донскера существуют и другие принципы инвариантности для случайных блужданий, в которых последние рассматриваются при некоторых условиях, касающихся либо положения в определенный момент времени, либо всей траектории. Такие случайные блуждания и соответствующие им принципы инвариантности получили название *условных.* В ниже следующем *условном принципе инвариантности Лиггетта* (см. [22]) рассматривается условие на S_n.

Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 9.1. *Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые или нерешетчатые случайные величины, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда для произвольного фиксированного $a > 0$ при $n \to \infty$*

$$\left\{Y_n(t), t \in [0,1] \;\middle|\; S_n \in (-a, a]\right\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0,1]$.

Следствие 9.1. *Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные центрально решетчатые случайные величины, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\left\{Y_n(t), t \in [0,1] \;\middle|\; S_n = 0\right\} \xrightarrow{D} W_0,$$

Доказательство теоремы 9.1 разобьем на ряд лемм. Будем считать, что в решетчатом случае a кратно максимальному шагу распределения X_1.

Лемма 9.1. *В условиях теоремы 9.1 для произвольного фиксированного $a > 0$ при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\left(S_n \in (-a, a]\right) \sim \frac{2a}{\sqrt{2\pi n}\sigma}$$

и, следовательно, $\mathsf{P}\left(S_n \in (-a, a]\right) \neq 0$ при достаточно больших n.

Доказательство. В силу теоремы Стоуна при $x \in \mathbb{R}$

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}\big(S_n \in \big(\sigma\sqrt{n}\,x - a, \sigma\sqrt{n}\,x + a\big]\big) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1), \quad n \to \infty.$$

При $x = 0$ получаем, что

$$\mathsf{P}\left(S_n \in (-a, a]\right) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi n}\sigma} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathsf{P}^{(x)}$ означает, что случайное блуждание $\{S_n\}$ стартует из точки x, а не из точки 0.

Лемма 9.2. *В условиях теоремы 9.1 при* $t \in (0, 1)$

$$\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}\,x)}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in (-a, a]\right) = \\ = \frac{2a}{\sqrt{2\pi\,(1-t)\,n}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

равномерно по x, *принадлежащим произвольному конечному отрезку.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}\,x)}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in (-a, a]\right) = \\ = \mathsf{P}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in \left(-\sigma\sqrt{n}\,x - a, -\sigma\sqrt{n}\,x + a\right]\right).$$

В силу теоремы Стоуна при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(S_{n-\lfloor nt\rfloor} \in \left(-\sigma\sqrt{n}\,x - a, -\sigma\sqrt{n}\,x + a\right]\right) = \\ = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n - \lfloor nt\rfloor}}e^{-\frac{1}{2}\frac{nx^2}{n-\lfloor nt\rfloor}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \\ = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n\,(1-t)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по x, принадлежащим произвольному конечному отрезку. Лемма доказана.

Лемма 9.3. *Пусть* $P, P_1, P_2, \ldots$ *– вероятностные меры на* $\mathbb{R}$ *с борелевской* σ*-алгеброй относительно стандартной топологии и последовательность* $\{P_n\}$ *слабо сходится к* P *при* $n \to \infty$.

Пусть $\{f_n\}$ – *последовательность равномерно ограниченных измеримых функций на* $\mathbb{R}$ *и* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *равномерно по* x, *принадлежащим произвольному конечному отрезку, причем* $f(x)$ – *непрерывная функция. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\, dP_n = \int_B f(x)\, dP$$

для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ *такого, что* $P(\partial B) = 0$.

Доказательство. Ввиду равномерной ограниченности последовательности функций $\{f_n\}$ и слабой сходимости $\{P_n\}$ к P, достаточно остановиться на случае, когда B – ограниченное множество. Очевидно,

$$\left| \int_B f_n(x)\, dP_n - \int_B f(x)\, dP \right| \leqslant \\ \leqslant \int_B |f_n(x) - f(x)|\, dP_n + \left| \int_B f(x)\, dP_n - \int_B f(x)\, dP \right|.$$

Первое слагаемое справа мало в силу равномерной сходимости $\{f_n\}$ к f на произвольном конечном отрезке; второе слагаемое мало ввиду слабой сходимости $\{P_n\}$ к P (вспомните теорему 6.1). Лемма доказана.

Лемма 9.4. *Конечномерные распределения процесса*

$$\big\{Y_n(t), t \in [0,1] \;\big|\; S_n \in (-a, a]\big\}$$

сходятся при $n \to \infty$ *к конечномерным распределениям процесса* W_0.

Доказательство. Пусть m – натуральное число, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$. Рассмотрим при фиксированных $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\big(Y_n(t_i) \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, m \;\big|\; S_n \in (-a, a]\big) = \\ = \frac{1}{\mathsf{P}\left(S_n \in (-a, a]\right)} \mathsf{P}\left(Y_n(t_i) \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, m;\ S_n \in (-a, a]\right).$$

В силу марковского свойства случайного блуждания правая часть равна

$$\int_{-\infty}^{a_m} d_x \,\mathsf{P}\left(Y_n(t_i) \leqslant a_i, i=1,\ldots,m-1; Y_n(t_m) \leqslant x\right) \times \\ \times \frac{\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}\,x)}\left(S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (-a,a]\right)}{\mathsf{P}\left(S_n \in (-a,a]\right)}.$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Y_n(t_i) \leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m-1;\ Y_n(t_m) \leqslant x\right) = \\ = \mathsf{P}\left(W(t_i) \leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m-1;\ W(t_m) \leqslant x\right).$$

Ввиду лемм 9.1 и 9.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}\,x)}\left(S_{n-\lfloor nt_m \rfloor} \in (-a,a]\right)}{\mathsf{P}\left(S_n \in (-a,a]\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-t_m}}\, e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}}$$

равномерно по x, принадлежащим произвольному конечному отрезку. Следовательно, по лемме 9.3

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(Y_n(t_i) \leqslant a_i, i=1,\ldots,m \bigm| S_n \in (-a,a]\big) = \\ = \int_{-\infty}^{a_m} d_x \mathsf{P}\left(W(t_i) \leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m-1;\ W(t_m) \leqslant x\right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1-t_m}}\, e^{-\frac{x^2}{2(1-t_m)}}. \tag{9.1}$$

Вспомним, что броуновское движение W является марковским процессом с переходной плотностью

$$p\,(s,x;t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \qquad 0 \leqslant s < t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\left(W(t_i) \leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m-1;\ W(t_m) \leqslant x\right) = \\ = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_{m-1}} \int_{-\infty}^{x} \prod_{i=1}^{m} p\,(t_{i-1},x_{i-1};t_i,x_i)\, dx_1 \ldots dx_m,$$

где $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Следовательно, правая часть (9.1) равна

$$\int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_m} \prod_{i=1}^{m} p\,(t_{i-1},x_{i-1};t_i,x_i)\, \frac{1}{\sqrt{1-t_m}}\, e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}}\, dx_1 \ldots dx_m.$$

В лекции 7 при доказательстве теоремы 7.3 было показано, что последний интеграл совпадает с $\mathsf{P}\left(W_0(t_i) \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, m\right)$. Лемма доказана.

Лемма 9.5. *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\big(w_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon \bigm| S_n \in (-a, a]\big) = 0.$$

Доказательство. Положим для $x \in D\,[a, b]$ при $-\infty < a \leqslant b < +\infty$

$$w_x\left(\delta; a, b\right) = \sup_{\substack{t,s\colon\, |t-s| \leqslant \delta, \\ t,s \in [a,b]}} \left|x(t) - x(s)\right|,$$

где δ – положительное число. Очевидно,

$$w_x(\delta) = w_x\left(\delta; 0, 1\right) \leqslant w_x\left(\delta; 0, 1/2\right) + w_x\left(\delta; 1/2, 1\right). \tag{9.2}$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\big(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon \bigm| S_n \in (-a, a]\big) = 0. \tag{9.3}$$

Запишем представление при $A > 0$:

$$\mathsf{P}\big(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon \bigm| S_n \in (-a, a]\big) = P_1\left(n, \delta, A\right) + P_2\left(n, \delta, A\right), \tag{9.4}$$

где

$$P_1\left(n, \delta, A\right) := \mathsf{P}\big(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon, \left|Y_n\left(1/2\right)\right| \leqslant A \bigm| S_n \in (-a, a]\big),$$
$$P_2\left(n, \delta, A\right) := \mathsf{P}\big(w_{Y_n}\left(\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon, \left|Y_n\left(1/2\right)\right| > A \bigm| S_n \in (-a, a]\big).$$

По лемме 9.4

$$\begin{aligned}
\lim_{A \to +\infty} \limsup_{n \to \infty} P_2\left(n, \delta, A\right) &\leqslant \\
&\leqslant \lim_{A \to +\infty} \limsup_{n \to \infty} P\big(\left|Y_n\left(1/2\right)\right| > A \bigm| S_n \in (-a, a]\big) = \\
&= \lim_{A \to +\infty} \mathsf{P}\left(\left|W_0\left(1/2\right)\right| > A\right) = 0.
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Далее,

$$P_1\left(n, \delta, A\right) = \int_{-A}^{A} d_x\, \mathsf{P}(w_{Y_n}(\delta; 0, 1/2) \geqslant \varepsilon, Y_n(1/2) \leqslant x) \times \\ \times \frac{\mathsf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}\big(S_{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in (-a, a]\big)}{\mathsf{P}\left(S_n \in (-a, a]\right)}. \tag{9.6}$$

По лемме 9.2

$$\mathsf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}\big(S_{n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\in(-a,a]\big)=\frac{2a}{\sqrt{\pi n}\sigma}e^{-x^2}\,(1+o(1))$$

равномерно по $x\in[-A,A]$, поэтому при достаточно больших n

$$\mathsf{P}^{(x\sigma\sqrt{n})}\big(S_{n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\in(-a,a]\big)\leqslant\frac{K}{\sqrt{n}}$$

при всех $x\in[-A,A]$, где K – положительная постоянная, не зависящая от n и x. Применяя это неравенство к (9.6), получаем, что при достаточно больших n

$$P_1\,(n,\delta,A)\leqslant\frac{K}{\sqrt{n}\,\mathsf{P}\,(S_n\in(-a,a])}\mathsf{P}\,(w_{Y_n}\,(\delta;0,1/2)\geqslant\varepsilon)\,.$$

По лемме 9.1

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\mathsf{P}\,(S_n\in(-a,a])=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\,(w_{Y_n}\,(\delta;0,1/2)\geqslant\varepsilon)=0.$$

Поэтому при фиксированном $A>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}P_1\,(n,\delta,A)=0. \tag{9.7}$$

Из соотношений (9.4), (9.5) и (9.7) следует (9.3).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\big(w_{Y_n}\,(\delta;1/2,1)\geqslant\varepsilon\;\big|\;S_n\in(-a,a]\big)=0. \tag{9.8}$$

Положим $\widetilde{S}_0=0$, $\widetilde{S}_1=S_n-S_{n-1}$, $\widetilde{S}_2=S_n-S_{n-2}$, $\ldots$, $\widetilde{S}_n=S_n-S_0=S_n$. Заметим, что

$$(S_1,\ldots,S_n)\overset{d}{=}(\widetilde{S}_1,\ldots,\widetilde{S}_n).$$

Условие $\{S_n\in(-a,a]\}$ означает, что $\{\widetilde{S}_n\in(-a,a]\}$. Положим $\widetilde{Y}_n(t)=\widetilde{S}_{\lfloor nt\rfloor}/\,(\sigma\sqrt{n}\,)$. В силу (9.3)

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\big(w_{\widetilde{Y}_n}\,(\delta;0,1/2)\geqslant\varepsilon\;\big|\;\widetilde{S}_n\in(-a,a]\big)=0. \tag{9.9}$$

Но при s, t таких, что $t, s \in [1/2, 1]$, $|t - s| \leqslant \delta$, и при четных и достаточно больших n

$$
\begin{aligned}
|Y_n(t) - Y_n(s)| &= \frac{\left|S_{\lfloor nt \rfloor} - S_{\lfloor ns \rfloor}\right|}{\sigma\sqrt{n}} = \\
&= \frac{\left|\widetilde{S}_{n-\lfloor ns \rfloor} - \widetilde{S}_{n-\lfloor nt \rfloor}\right|}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant w_{\widetilde{Y}_n}\left(2\delta; 0, 1/2\right).
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(w_{Y_n}\left(\delta; 1/2, 1\right) \geqslant \varepsilon \bigm| S_n \in (-a, a]\big) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \mathsf{P}\big(w_{\widetilde{Y}_n}\left(2\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon \bigm| \widetilde{S}_n \in (-a, a]\big).
\end{aligned}
$$

Откуда, ввиду соотношения (9.9), следует (9.8).

Из соотношений (9.2), (9.3) и (9.8) получаем утверждение леммы.

Из лемм 9.4 и 9.5 в силу теоремы 2.3 приходим к утверждению доказываемой теоремы.

Лекция 10
Предельная теорема для статистики Колмогорова

В качестве приложения принципа инвариантности Лиггетта получим один из фундаментальных результатов математической статистики, установленный А. Н. Колмогоровым.

Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(t)$. Введем для каждого $n \in \mathbb{N}$ эмпирическую функцию распределения

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I\left\{\eta_i \leqslant t\right\}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $I\{\ldots\}$ означает индикатор случайного события $\{\ldots\}$. $F_n(t)$ – случайная величина, и по усиленному закону больших чисел п.н.

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t).$$

По теореме Гливенко–Кантелли п.н.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| = 0.$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы узнать, с какой скоростью случайная величина $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$, получившая название *статистики Колмогорова*, стремится к нулю.

Теорема 10.1. *Для произвольного* $x \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\sqrt{n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \leqslant x\right) = K(x),$$

где $K(x)$ *– функция распределения Колмогорова.*

Доказательство опирается на следующую лемму, сводящую все к случаю, когда случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ имеют равномерное распределение на интервале $(0,1)$, и на теорему 10.2, в которой в указанном случае доказывается более общий результат.

Лемма 10.1. *Случайная величина* $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|$ *имеет такое же распределение, как* $\sup_{t\in[0,1]} \left|\widetilde{F}_n(t) - t\right|$, *где* $\widetilde{F}_n(t)$ –

эмпирическая функция распределения, построенная по $\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2, \ldots$ *– независимым одинаково распределенным случайным величинам, имеющим равномерное распределение на интервале* $(0,1)$.

Доказательство. Для простоты изложения будем считать, что функция распределения $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, строго возрастает, тогда существует обратная функция $F^{-1}(y)$, $y \in (0,1)$. Случайные величины $\widetilde{\eta}_i = F(\eta_i)$, $i \in \mathbb{N}$, имеют равномерное распределение на интервале $(0,1)$.

Действительно, при $y \in (0,1)$

$$\mathsf{P}(\widetilde{\eta}_i \leqslant y) = \mathsf{P}(F(\eta_i) \leqslant y) = \mathsf{P}\left(\eta_i \leqslant F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{\eta_i \leqslant t\} - F(t)\right| = \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{F(\eta_i) \leqslant F(t)\} - F(t)\right| = \\ &= \sup_{u\in[0,1]}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{\widetilde{\eta}_i \leqslant u\} - u\right|.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 10.2. *Если* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *– независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на интервале* (0,1), *то при* $n \to \infty$

$$\left\{\sqrt{n}\,\left(F_n(t) - t\right),\ t \in [0,1]\right\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 *– броуновский мост, знак* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0,1]$.

В качестве следствия этой теоремы получаем, что при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\sup_{t\in[0,1]}|F_n(t) - t| \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]}|W_0|.$$

Но правая часть, как показано в теореме 7.4, имеет распределение Колмогорова. Откуда, учитывая лемму 10.1, получаем утверждение теоремы 10.1.

Доказательство теоремы 10.2 разобьем на ряд лемм. Положим

$$Y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} I\left\{\eta_i \leqslant t\right\}.$$

Лемма 10.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Тогда случайный вектор*

$$\{Y_n(t_1), Y_n(t_2) - Y_n(t_1), \dots, Y_n(t_m) - Y_n(t_{m-1})\}$$

имеет полиномиальное распределение с вектором параметров

$$\{t_1, t_2 - t_1, \dots, t_m - t_{m-1}\},$$

т.е. при целых неотрицательных числах $k_1, \dots, k_m$ таких, что $\sum_{i=1}^m k_i \leqslant n$, справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\big(Y_n(t_1) = k_1, Y_n(t_2) - Y_n(t_1) = k_2, \dots, Y_n(t_m) - Y_n(t_{m-1}) = k_m\big) =\\ = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!\big(n - \sum_{i=1}^m k_i\big)!}\times\\ \times t_1^{k_1}(t_2 - t_1)^{k_2}\dots(t_m - t_{m-1})^{k_m}(1 - t_m)^{n - \sum_{i=1}^m k_i}.\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину η, имеющую равномерное распределение на интервале $(0,1)$. Положим $t_0 = 0$. Будем говорить, что 1) достигается успех i-го типа, если $t_{i-1} < \eta \leqslant t_i$, $i = 1, \dots, m$; 2) имеет место неудача, если $t_m < \eta < 1$. Тогда $(Y_n(t_i) - Y_n(t_{i-1}))$ – число успехов i-го типа в n независимых испытаниях, $i = 1, \dots, m$; $(Y_n(1) - Y_n(t_m))$ – число неудач. Отсюда следует утверждение леммы.

Положим

$$\widetilde{Y}_n(t) = Y_n\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right).$$

Следствие 10.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$. Тогда случайный вектор*

$$\left\{\widetilde{Y}_n(t_1), \widetilde{Y}_n(t_2) - \widetilde{Y}_n(t_1), \dots, \widetilde{Y}_n(t_m) - \widetilde{Y}_n(t_{m-1})\right\}$$

имеет полиномиальное распределение с вектором параметров

$$\left\{\frac{\lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \frac{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \dots, \frac{\lfloor nt_m \rfloor - \lfloor nt_{m-1} \rfloor}{n}\right\}.$$

Положим

$$Z_n(t) = \sqrt{n}\,\left(F_n(t) - t\right).$$

Наша задача показать, что при $n \to \infty$

$$Z_n \xrightarrow{D} W_0. \tag{10.1}$$

Очевидно, что $F_n(t) = Y_n(t)/n$. Откуда следует, что

$$Z_n(t) = \frac{Y_n(t) - nt}{\sqrt{n}}.$$

Положим

$$\widetilde{Z}_n(t) = Z_n\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right).$$

Тогда

$$\widetilde{Z}_n(t) = \frac{\widetilde{Y}_n(t) - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}}.$$

Докажем сначала, что при $n \to \infty$

$$\widetilde{Z}_n \xrightarrow{D} W_0. \tag{10.2}$$

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин X_i, $i \in \mathbb{N}$, имеющих распределение Пуассона с параметром $a > 0$, и положим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 10.3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$. Случайный вектор*

$$\left\{S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, S_{\lfloor nt_2 \rfloor} - S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, \ldots, S_{\lfloor nt_m \rfloor} - S_{\lfloor nt_{m-1} \rfloor} \;\middle|\; S_n = n\right\}$$

имеет полиномиальное распределение с вектором параметров

$$\left\{\frac{\lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \frac{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}{n}, \ldots, \frac{\lfloor nt_m \rfloor - \lfloor nt_{m-1} \rfloor}{n}\right\}.$$

Доказательство. При целых неотрицательных числах $k_1, \ldots, k_m$ таких, что $\sum_{i=1}^m k_i \leqslant n$, находим, что ($t_0 = 0$)

$$\mathsf{P}\big(S_{\lfloor nt_i \rfloor} - S_{\lfloor nt_{i-1} \rfloor} = k_i,\ i = 1, \ldots, m \;\big|\; S_n = n\big) =$$
$$= \frac{1}{\mathsf{P}\left(S_n = n\right)} \prod_{i=1}^m \mathsf{P}\left(S_{\lfloor nt_i \rfloor} - S_{\lfloor nt_{i-1} \rfloor} = k_i\right) \times$$
$$\times\, \mathsf{P}\left(S_n - S_{\lfloor nt_m \rfloor} = n - (k_1 + \cdots + k_m)\right) =$$

$$= \frac{n!}{(an)^n e^{-an}} \prod_{i=1}^{m} \frac{\left(a\left(\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor\right)\right)^{k_i} e^{-a(\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor)}}{k_i!} \times$$

$$\times \frac{\left(a\left(n - \lfloor nt_m \rfloor\right)\right)^{n-\sum_{i=1}^m k_i} e^{-a(n-\lfloor nt_m \rfloor)}}{\left(n - \sum_{i=1}^m k_i\right)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!\left(n - \sum_{i=1}^m k_i\right)!} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_{i-1} \rfloor}{n}\right)^{k_i} \left(\frac{n - \lfloor nt_m \rfloor}{n}\right)^{n-\sum_{i=1}^m k_i}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$a = 1; \qquad \widetilde{X}_i = X_i - 1, \quad i \in \mathbb{N}; \qquad \widetilde{S}_n = \widetilde{X}_1 + \dots + \widetilde{X}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\mathsf{E}\widetilde{X}_1 = 0$, $\mathsf{E}(\widetilde{X}_1)^2 = 1$ и $\widetilde{S}_n = S_n - n$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду следствия 10.1 и леммы 10.3 совпадают конечномерные распределения процессов

$$\left\{\widetilde{Y}_n(t),\ t \in [0,1]\right\} \quad \text{и} \quad \left\{S_{\lfloor nt \rfloor},\ t \in [0,1] \;\middle|\; S_n = n\right\}.$$

Следовательно, совпадают конечномерные распределения процессов

$$\left\{\widetilde{Z}_n(t),\ t \in [0,1]\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\widetilde{S}_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n}\,,\ t \in [0,1] \;\middle|\; \widetilde{S}_n = 0\right\}.$$

По принципу инвариантности Лиггетта при $n \to \infty$

$$\left\{\widetilde{S}_{\lfloor nt \rfloor}/\sqrt{n}\,,\ t \in [0,1] \;\middle|\; \widetilde{S}_n = 0\right\} \xrightarrow{D} W_0,$$

поэтому соотношение (10.2) справедливо и (см. лемму 9.5) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(w_{\widetilde{Z}_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{10.3}$$

Далее, ввиду монотонности по t функции $Y_n(t)$ выполняется неравенство

$$w_{Y_n}(1/n) \leqslant 2 w_{\widetilde{Y}_n}(1/n)$$

и поэтому

$$\rho_{\text{равн}}\bigl(Z_n, \widetilde{Z}_n\bigr) \leqslant w_{Z_n}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{w_{Y_n}(1/n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant \\ \leqslant \frac{2w_{\widetilde{Y}_n}(1/n)+1}{\sqrt{n}} \leqslant 2w_{\widetilde{Z}_n}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{\sqrt{n}}. \qquad (10.4)$$

Из соотношений (10.3), (10.4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\rho_{\text{равн}}\bigl(Z_n, \widetilde{Z}_n\bigr) \geqslant \varepsilon\bigr) = 0.$$

Но это вместе с соотношением (10.2) означает, как нетрудно понять, справедливость (10.1). Теорема доказана.

Лекция 11
Броуновская извилина и броуновская экскурсия: определение и конечномерные распределения

Пусть $\{W(t)\}$ – стандартное броуновское движение. Положим (см. рис. 4)

$$\tau_1 = \sup\{t \in [0,1] \colon W(t) = 0\}, \qquad \Delta_1 = 1 - \tau_1,$$
$$\tau_2 = \inf\{t > 1 \colon W(t) = 0\}, \qquad \Delta_2 = \tau_2 - \tau_1.$$

Определение 11.1. *Броуновской извилиной* называется случайный процесс

$$W^+(t) = \frac{|W(\tau_1 + t\Delta_1)|}{\sqrt{\Delta_1}}, \qquad t \in [0,1].$$

Броуновской экскурсией называется случайный процесс

$$W_0^+(t) = \frac{|W(\tau_1 + t\Delta_2)|}{\sqrt{\Delta_2}}, \qquad t \in [0,1].$$

Эти процессы играют важную роль в теории ветвящихся процессов. В данной лекции показывается, что броуновская извилина и броуновская экскурсия являются марковскими случайными процессами, и находятся их переходные плотности.

Введем следующие обозначения: N_s – случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и s, где $s > 0$; $n_s(x)$ – плотность вероятностей случайной величины N_s, т.е.

$$n_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{x^2}{2s}}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$N_s(a,b)$ – распределение случайной величины N_s на интервалах, т.е.

$$N_s(a,b) = \mathsf{P}(a < N_s < b), \qquad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b$$

(при $s = 1$ значок s опускается). Положим также

$$g(t,x,y) = n_t(y-x) - n_t(y+x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

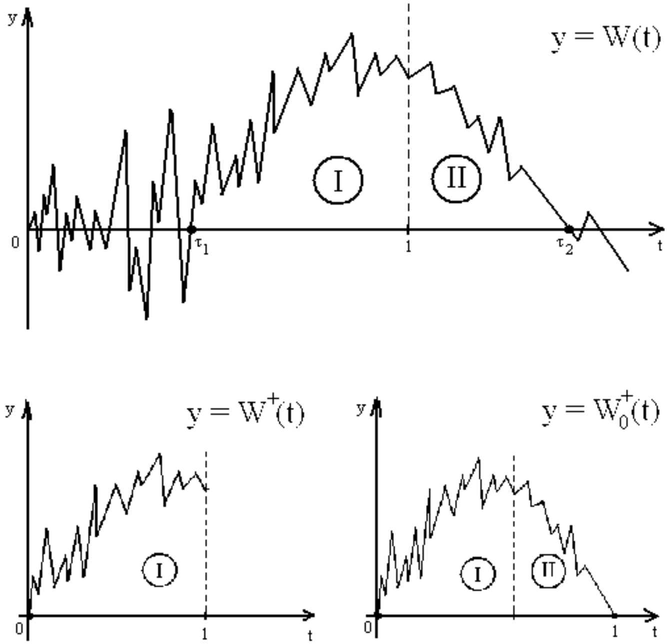

Рис. 4.

Теорема 11.1. *Броуновская извилина W^+ является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$p^+(s,x;t,y)=\begin{cases}\dfrac{2y}{t^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2t}\right)N_{1-t}(0,y)\,, & \\ \qquad\qquad 0=s<t\leqslant 1,\quad x=0,\quad y>0; & \\ g(t-s,x,y)\,\dfrac{N_{1-t}(0,y)}{N_{1-s}(0,x)}, & \\ \qquad\qquad 0<s<t\leqslant 1;\quad x>0,\quad y>0. & \end{cases}$$

Доказательство. Зафиксируем $m\in\mathbb{N}$ и моменты времени $t_1,t_2,\ldots,t_m$ такие, что $0<t_1<t_2<\cdots<t_m\leqslant 1$. Пусть $f_1(x_1,\ldots,x_m)$ – произвольная непрерывная числовая функция m числовых переменных, исчезающая на бесконечности (равная

нулю вне некоторого шара), $f_2(x)$ – произвольная непрерывная числовая функция одного числового переменного, исчезающая на бесконечности. Покажем, что ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[f_1\left(W^+(t_1),\dots,W^+(t_m)\right)f_2\left(\Delta_1\right)\right] = \\
&\qquad = \int\cdots\int_{\mathbb{R}_+^m} f_1\left(x_1,\dots,x_m\right)\times \\
&\qquad\qquad \times\prod_{i=0}^{m-1} p^+\left(t_i,x_i;t_{i+1},x_{i+1}\right)\,dx_1\dots dx_m\,\mathsf{E}f_2\left(\Delta_1\right), \quad (11.1)
\end{aligned}$$

где $\mathbb{R}_+^m = \{x_1,\dots,x_m\colon x_1>0,\dots,x_m>0\}$. Это означает помимо утверждения теоремы, что процесс W^+ не зависит от случайной величины Δ_1.

Для произвольного n разобьем отрезок $[0,1]$ на n частей. Тогда существует единственное целое число i такое, что $i/n < \Delta_1 \leqslant (i+1)/n$.

Случайная величина $f_1\left(W^+(t_1),\dots,W^+(t_m)\right)$ близка, ввиду непрерывности траекторий броуновской извилины и непрерывности функции f_1, к случайной величине

$$\zeta_{n,m} := f_1\left(\frac{|W(1-i/n+t_1(i/n))|}{\sqrt{i/n}},\dots,\frac{|W(1-i/n+t_m(i/n))|}{\sqrt{i/n}}\right),$$

а случайная величина $f_2\left(\Delta_1\right)$ близка, ввиду непрерывности функции f_2, к $f_2\left(i/n\right)$. Поэтому

$$\mathsf{E}\big[f_1\left(W^+(t_1),\dots,W^+\left(t_m\right)\right)f_2\left(\Delta_1\right)\big] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}A_i(n), \qquad (11.2)$$

где

$$A_i(n) := \mathsf{E}\big[\zeta_{n,m}f_2\left(i/n\right); i/n < \Delta_1 \leqslant \left(i+1\right)/n\big].$$

Учитывая, что вклад в последнее математическое ожидание траекторий процесса W, лежащих при $t\in[\tau_1,1]$ выше нуля, равен вкладу траекторий, лежащих ниже нуля, получаем, что

$$\begin{aligned}
A_i(n) = &\int_0^{+\infty} h\left(i/n,a\right)f_2\left(i/n\right)\times \\
&\times \mathsf{P}\big(\exists t\in\left[1-\left(i+1\right)/n,1-i/n\right) : W(t)=0; W\left(1-i/n\right)\in da\big), \\
&\qquad (11.3)
\end{aligned}$$

где

$$h\left(i/n,a\right)=\mathsf{E}\left[\zeta_{n,m}I\left\{\inf_{1-i/n\leqslant s\leqslant 1}W(s)>0\right\}\,\middle|\,W\left(1-(i/n)\right)=a\right]. \tag{11.4}$$

Положим при $t\geqslant 0$ $m(t)=\inf_{0\leqslant s\leqslant t}W(s)$, $M(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}W(s)$ и $m(1)=m$, $M(1)=M$. Вспомним (см. лекцию 7), что при $a\leqslant 0$, $a\leqslant u<v$

$$\mathsf{P}\left(a<m,u<W(1)<v\right)=\mathsf{P}\left(u<N<v\right)-\mathsf{P}\left(2a-v<N<2a-u\right).$$

Откуда легко получить, что при $t>0$, $a\leqslant 0$, $a\leqslant u<v$

$$\mathsf{P}\left(a<m_t,u<W(t)<v\right)=\mathsf{P}\left(u<N_t<v\right)-\mathsf{P}\left(2a-v<N_t<2a-u\right). \tag{11.5}$$

Пусть $\mathsf{P}^{(t,x)}$ означает, что броуновское движение начинается в момент t в точке x. При $0\leqslant t_1<t_2$, $x_1\geqslant 0$, $x_2>0$, $\Delta x>0$ из (11.5) следует, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}^{(t_1,x_1)}\left(W(t_2)\in(x_2,x_2+\Delta x);\inf_{t_1\leqslant s\leqslant t_2}W(s)>0\right)=\\
&\quad=\mathsf{P}\left(x_2-x_1<W(t_2-t_1)<x_2-x_1+\Delta x,m(t_2-t_1)>-x_1\right)=\\
&\quad=\mathsf{P}\left(x_2-x_1<N_{t_2-t_1}<x_2-x_1+\Delta x\right)-\\
&\qquad\quad-\mathsf{P}\left(-x_1-x_2-\Delta x<N_{t_2-t_1}<-x_1-x_2\right)=\\
&\quad=\left[n_{t_2-t_1}\left(x_2-x_1\right)-n_{t_2-t_1}\left(x_1+x_2\right)\right]\Delta x+o\left(\Delta x\right)=\\
&\quad=g\left(t_2-t_1,x_1,x_2\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right),\qquad \Delta x\to 0.
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Применяя марковское свойство и автомодельность броуновского движения (при $c>0$ $\{W(t),t\geqslant 0\}\overset{d}{=}\{(1/\sqrt{c})\,W(ct),\ t\geqslant 0\}$), находим, что правая часть соотношения (11.4) равна

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[f_1\left(\frac{W(t_1(i/n))}{\sqrt{i/n}},\dots,\frac{W(t_m(i/n))}{\sqrt{i/n}}\right)\times\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times I\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant i/n}W(s)>0\right\}\,\middle|\,W(0)=a\right]=\\
&\quad=\mathsf{E}\left[f_1\left(W(t_1),\dots,W(t_m)\right)\times\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times I\left\{\inf_{0\leqslant s\leqslant 1}W(s)>0\right\}\,\middle|\,W(0)=\frac{a}{\sqrt{i/n}}\right].
\end{aligned}$$

Снова учитывая марковское свойство броуновского движения и соотношение (11.6), получаем, что последнее математическое ожидание равно

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\mathsf{P}^{\left(0,\frac{a}{\sqrt{i/n}}\right)}\left(W(t_1)\in dx_1,\inf_{0\leqslant s\leqslant t_1}W(s)>0\right)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{m-1}\mathsf{P}^{(t_i,x_i)}\left(W(t_{i+1})\in dx_{i+1},\inf_{t_i\leqslant s\leqslant t_{i+1}}W(s)>0\right)\times$$
$$\times\,\mathsf{P}^{(t_m,x_m)}\left(\inf_{t_m\leqslant s\leqslant 1}W(s)>0\right)=$$
$$=\int\cdots\int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)g\left(t_1,\frac{a}{\sqrt{i/n}},x_1\right)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{m-1}g\left(t_{i+1}-t_i,x_i,x_{i+1}\right)\,dx_1\ldots dx_m\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}g\left(1-t_m,x_m,b\right)\,db.$$

Итак,

$$h\left(i/n,a\right)=\int\cdots\int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)g\left(t_1,\frac{a}{\sqrt{i/n}},x_1\right)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{m-1}g\left(t_{i+1}-t_i,x_i,x_{i+1}\right)\,dx_1\ldots dx_m\int_0^{+\infty}g\left(1-t_m,x_m,b\right)\,db. \tag{11.7}$$

Заметим, что при $t>0$, $x>0$

$$\int_0^{+\infty}g(t,x,y)\,dy=\int_0^{+\infty}n_t(y-x)\,dy-\int_0^{+\infty}n_t(y+x)\,dy=$$
$$=\int_{-x}^{+\infty}n_t(u)\,du-\int_x^{+\infty}n_t(u)\,du=$$
$$=N_t(-x,x)=2N_t(0,x). \tag{11.8}$$

Следовательно,

$$g\left(t_1,\frac{a}{\sqrt{i/n}},x_1\right)\prod_{i=1}^{m-1}g(t_{i+1}-t_i,x_i,x_{i+1})\int_0^{+\infty}g(1-t_m,x_m,b)\,db=$$

$$= g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) \prod_{i=1}^{m-1} g\left(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}\right) 2N_{1-t_m}(0, x_m) =$$

$$= 2g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) N_{1-t_1}(0, x_1)\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{m-1} g\left(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}\right) \frac{N_{1-t_{i+1}}\left(0, x_{i+1}\right)}{N_{1-t_i}\left(0, x_i\right)} =$$

$$= 2g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) N_{1-t_1}(0, x_1) \prod_{i=1}^{m-1} p^+\left(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}\right).$$

Исходя из этого, перепишем (11.7) ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$):

$$h\left(i/n, a\right) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1, \ldots, x_m\right) \prod_{i=0}^{m-1} p^+\left(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}\right) \times$$
$$\times H\left(i/n, a, x_1\right)\, dx_1 \ldots dx_m, \tag{11.9}$$

где

$$H\left(i/n, a, x_1\right) = 2g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right) \Big/ \left(\frac{2x_1}{t_1^{3/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right)\right). \tag{11.10}$$

Теперь перепишем соотношение (11.3):

$$A_i(n) = \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\big(\exists t \in [1 - (i+1)/n, 1 - i/n) :$$
$$W(t) = 0; W\left(1 - i/n\right) \in da\big)\times$$
$$\times f_2\left(i/n\right) \int_0^{+\infty} g\left(\frac{i}{n}, a, b\right) db\times$$
$$\times \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1, \ldots, x_m\right) \prod_{i=0}^{m-1} p^+\left(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}\right) \times$$
$$\times \widetilde{H}\left(i/n, a, x_1\right)\, dx_1 \ldots dx_m, \tag{11.11}$$

где

$$\widetilde{H}\left(i/n, a, x_1\right) = H\left(i/n, a, x_1\right) \left(\int_0^{+\infty} g\left(i/n, a, b\right)\, db\right)^{-1}.$$

Ввиду (11.8) и (11.10)

$$\widetilde{H}\left(\frac{i}{n}, a, x_1\right) = \frac{g\left(t_1, \frac{a}{\sqrt{i/n}}, x_1\right)}{\left(\frac{2x_1}{t_1^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right) N_{\frac{i}{n}}(0, a)}.$$

Заметим, что при $x \to 0$ и фиксированных $t > 0$, $y \neq 0$

$$g(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}\left(e^{\frac{xy}{t}-\frac{x^2}{2t}} - e^{-\frac{xy}{t}-\frac{x^2}{2t}}\right) \sim \frac{2xy}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}; \tag{11.12}$$

при $x \downarrow 0$ и фиксированном $t > 0$

$$N_t(0,x) \sim \frac{x}{\sqrt{2\pi t}}, \tag{11.13}$$

поэтому

$$\lim_{a \downarrow 0} \widetilde{H}\left(i/n, a, x_1\right) = 1, \tag{11.14}$$

причем это соотношение выполняется равномерно по i/n и x_1 таким, что $i/n > \varepsilon$ и $x_1 \leqslant K$, где ε, K – положительные постоянные.

При больших n с вероятностью, близкой к единице, величину a в (11.11) можно считать малой, поэтому, ввиду (11.14), $A_i(n)$ мало отличается от

$$\int_0^{+\infty} \mathsf{P}\left(\exists t \in \left[1-(i+1)/n, 1-i/n\right) : W(t) = 0; W\left(1-i/n\right) \in da\right) \times \\ \times f_2\left(i/n\right) \int_0^{+\infty} g\left(i/n, a, b\right)\, db \times \\ \times \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1, \ldots, x_m\right) \prod_{i=0}^{m-1} p^+\left(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}\right)\, dx_1 \ldots dx_m,$$

и в силу (11.2) получаем, что

$$\mathsf{E}\left(f_1\left(W^+(t_1), \ldots, W^+(t_m)\right) f_2\left(\Delta_1\right)\right) = \\ = \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^m} f\left(x_1, \ldots, x_m\right) \prod_{i=0}^{m-1} p^+\left(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}\right)\, dx_1 \ldots dx_m \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\big(\exists t \in [1-(i+1)/n, 1-i/n):$$
$$W(t)=0; W(1-i/n)\in da\big)\times$$
$$\times f_2\left(\frac{i}{n}\right)\mathsf{P}\left(\inf_{1-i/n\leqslant s\leqslant 1} W(s)>0 \;\middle|\; W(1-i/n)=a\right).$$

Но последний предел равен $\mathsf{E}f_2(\Delta)$. Соотношение (11.1) и теорема доказаны.

Следующий результат доказывается аналогично теореме 11.1 (см. [4, § 2.9]).

Теорема 11.2. *Броуновская экскурсия W_0^+ является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью*

$$p_0^+(s,x;t,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2\exp\left(\frac{-y^2}{2t(1-t)}\right)}{\sqrt{2\pi t^3(1-t)^3}}, \\ \qquad 0=s<t<1, \quad x=0, \quad y>0; \\ g(t-s,x,y)\left(\dfrac{1-s}{1-t}\right)^{3/2} \dfrac{y\exp\left(-y^2/(2(1-t))\right)}{x\exp\left(-x^2/(2(1-s))\right)}, \\ \qquad 0<s<t<1, \quad x>0, \quad y>0. \end{cases}$$

Заметим также, что процесс W_0^+ и случайная величина Δ_2 независимы.

Лекция 12
Броуновская извилина и броуновская экскурсия как условное броуновское движение

В лекции 7 установлено, что броуновский мост W_0 может быть представлен как условное броуновское движение с условием на положение в момент времени $t = 1$. Оказывается, что броуновская извилина W^+ и броуновская экскурсия W_0^+ также могут быть представлены как условное броуновское движение, но с условием на всю траекторию.

Положим при $\varepsilon > 0$

$$W^\varepsilon = \{W \,|\, m > -\varepsilon\}.$$

Теорема 12.1. *При* $\varepsilon \to 0$

$$W^\varepsilon \xrightarrow{D} W^+,$$

где знак $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $C[0,1]$.

Доказательство. Сначала заметим (в соотношении (11.5) вместо a возьмем $(-a)$ и положим $u = -a$, $v = +\infty$), что при $t > 0$, $a > 0$

$$\mathsf{P}\left(m(t) > -a\right) = \mathsf{P}\left(N_t > -a\right) - \mathsf{P}\left(N_t < -a\right) = 2N_t\left(0, a\right), \quad (12.1)$$

поэтому (см. соотношение (11.13)) при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathsf{P}\left(m(t) > -\varepsilon\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\varepsilon. \quad (12.2)$$

Докажем сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant 1$. Пользуясь марковским свойством броуновского движения, запишем для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ представление ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$):

$$\mathsf{P}(W(t_i) \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m; m > -\varepsilon) =$$
$$= \int \cdots \int_{G_\varepsilon(a_1,\ldots,a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} \mathsf{P}^{(0,x_i)}\big(W\left(t_{i+1} - t_i\right) \in dx_{i+1},$$
$$m\left(t_{i+1} - t_i\right) > -\varepsilon\big)\mathsf{P}^{(0,x_m)}\left(m\left(1 - t_m\right) > -\varepsilon\right), \quad (12.3)$$

где $G_\varepsilon(a_1,\ldots,a_m)=\{x_1,\ldots,x_m\colon -\varepsilon<x_1\leqslant a_1,\ldots,-\varepsilon<x_m\leqslant a_m\}$. Ввиду формулы (11.6) при $t>0$, $x_1\geqslant-\varepsilon$, $x_2>-\varepsilon$, $\Delta x>0$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^{(0,x_1)}\left(W(t)\in(x_2,x_2+\Delta x),m(t)>-\varepsilon\right)=\\ =\mathsf{P}^{(0,x_1+\varepsilon)}\left(W(t)\in(x_2+\varepsilon,x_2+\varepsilon+\Delta x),m(t)>0\right)=\\ =g\left(t,x_1+\varepsilon,x_2+\varepsilon\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right),\qquad \Delta x\to0.\end{aligned}$$

В силу соотношения (12.1)

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^{(0,x_m)}\left(m\left(1-t_m\right)>-\varepsilon\right)=\mathsf{P}\left(m\left(1-t_m\right)>-x_m-\varepsilon\right)=\\ =2N_{1-t_m}\left(0,x_m+\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Поэтому, переписывая (12.3), получаем, что

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(W(t_i)\leqslant a_i,i=1,\ldots,m;m>-\varepsilon)=\\ &=\int\cdots\int_{G_\varepsilon(a_1,\ldots,a_m)}\prod_{i=0}^{m-1}g\left(t_{i+1}-t_i,x_i+\varepsilon,x_{i+1}+\varepsilon\right)\times\\ &\quad\times 2N_{1-t_m}\left(0,x_m+\varepsilon\right)\,dx_1\ldots dx_m.\end{aligned}$$

Заметим, что функция $g(t,x,y)$ непрерывна в своей области определения, причем $g(t,x,y)=0$ при $x=0$ или $y=0$, и (см. соотношение (11.12)) при $t>0$, $y\neq0$

$$g\left(t,\varepsilon,y+\varepsilon\right)\sim\frac{2\varepsilon y}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\,e^{-\frac{y^2}{2t}},\qquad \varepsilon\to0.$$

Поэтому при $\varepsilon\to0$

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(W(t_i)\leqslant a_i,i=1,\ldots,m;m>-\varepsilon)\sim\\ &\sim\varepsilon\int\cdots\int_{G_0(a_1,\ldots,a_m)}\frac{4x_1}{\sqrt{2\pi}t_1^{3/2}}\,e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}\times\\ &\quad\times\prod_{i=1}^{m-1}g\left(t_{i+1}-t_i,x_i,x_{i+1}\right)N_{1-t_m}\left(0,x_m\right)\,dx_1\ldots dx_m,\end{aligned}\tag{12.4}$$

где $G_0(a_1,\ldots,a_m)=\{x_1,\ldots,x_m\colon 0<x_1\leqslant a_1,\ldots,0<x_m\leqslant a_m\}$. Из (12.2) и (12.4) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathsf{P}(W(t_i)\leqslant a_i,i=1,\ldots,m\,|\,m>-\varepsilon)=$$

$$= \int \cdots \int_{G_0(a_1,\ldots,a_m)} \frac{2x_1}{t_1^{3/2}}\, e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{m-1} g\left(t_{i+1}-t_i, x_i, x_{i+1}\right) N_{1-t_m}\left(0, x_m\right) dx_1 \ldots dx_m =$$
$$= \int \cdots \int_{G_0(a_1,\ldots,a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} p^+\left(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}\right) dx_1 \ldots dx_m. \tag{12.5}$$

Сходимость конечномерных распределений доказана.

Покажем, что выполнено условие на модуль непрерывности: при любом $\gamma > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}\left(w_{W^\varepsilon}(\delta) \geqslant \gamma\right) = 0 \tag{12.6}$$

(здесь используется тот же символ для обозначения вероятности, что и в (12.4), хотя вероятностное пространство изменилось). Очевидно, при любом $a \in (0,1)$

$$w_{W^\varepsilon}\left(\delta; 0, 1\right) \leqslant w_{W^\varepsilon}\left(\delta; 0, a\right) + w_{W^\varepsilon}\left(\delta; a, 1\right). \tag{12.7}$$

Покажем, что при фиксированном $a \in (0,1)$ для любого $\gamma > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}\left(w_{W^\varepsilon}\left(\delta; a, 1\right) \geqslant \gamma\right) = 0. \tag{12.8}$$

Действительно,

$$\mathsf{P}\left(w_{W^\varepsilon}\left(\delta; a, 1\right) \geqslant \gamma\right) = \mathsf{P}\big(w_W\left(\delta; a, 1\right) \geqslant \gamma \;\big|\; m > -\varepsilon\big) =$$
$$= \frac{1}{\mathsf{P}\left(m > -\varepsilon\right)} \mathsf{P}\left(w_W\left(\delta; a, 1\right) \geqslant \gamma, m > -\varepsilon\right) \leqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\mathsf{P}\left(m > -\varepsilon\right)} \mathsf{P}\left(w_W\left(\delta; a, 1\right) \geqslant \gamma, m(a) > -\varepsilon\right). \tag{12.9}$$

В силу марковского свойства броуновского движения

$$\mathsf{P}\left(w_W\left(\delta; a, 1\right) \geqslant \gamma, m(a) > -\varepsilon\right) =$$
$$= \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \mathsf{P}\left(m(a) > -\varepsilon, W(a) \in dx\right) \mathsf{P}^{(0,x)}\left(w_W\left(\delta; 0, 1-a\right) \geqslant \gamma\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(w_W\left(\delta; 0, 1-a\right) \geqslant \gamma\right) \mathsf{P}\left(m(a) > -\varepsilon\right) \tag{12.10}$$

(здесь использовано то, что вероятность $\mathsf{P}^{(0,x)}(w_W(\delta;0,1-a)\geqslant\gamma)$ не зависит от x). Из (12.9) и (12.10) получаем, что

$$\mathsf{P}\left(w_{W^\varepsilon}\left(\delta;a,1\right)\geqslant\gamma\right)\leqslant\frac{\mathsf{P}\left(m(a)>-\varepsilon\right)}{\mathsf{P}\left(m>-\varepsilon\right)}P\left(w_W\left(\delta;0,1-a\right)\geqslant\gamma\right). \tag{12.11}$$

Ввиду (12.2)

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mathsf{P}\left(m(a)>-\varepsilon\right)}{\mathsf{P}\left(m>-\varepsilon\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}}. \tag{12.12}$$

В силу непрерывности траекторий броуновского движения

$$\lim_{\delta\to0}P\left(w_W\left(\delta;0,1-a\right)\geqslant\gamma\right)=0. \tag{12.13}$$

Из соотношений (12.11)-(12.13) следует (12.8).

Теперь покажем, что для любого $\gamma>0$

$$\lim_{a\to0}\limsup_{\varepsilon\to0}\mathsf{P}\left(w_{W^\varepsilon}\left(\delta;0,a\right)\geqslant\gamma\right)=0 \tag{12.14}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{a\to0}\liminf_{\varepsilon\to0}\mathsf{P}\left(w_{W^\varepsilon}\left(\delta;0,a\right)<\gamma\right)=1. \tag{12.15}$$

Очевидно, что

$$w_{W^\varepsilon}(\delta;0,a)\leqslant\sup_{t\in[0,a]}W^\varepsilon(t)+\varepsilon.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{a\to0}\liminf_{\varepsilon\to0}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,a]}W^\varepsilon(t)<\gamma\right)=1. \tag{12.16}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(m>-\varepsilon\right)\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,a]}W^\varepsilon(t)<\gamma\right)&=\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,a]}W(t)<\gamma,m>-\varepsilon\right)=\\ &=\int_{-\varepsilon}^{\gamma}\mathsf{P}\big(-\varepsilon<m(a)\leqslant M(a)<\gamma,W(a)\in dx\big)\times\\ &\quad\times\mathsf{P}^{(0,x)}\left(m(1-a)>-\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{12.17}$$

Вспомним (см. соотношение (7.2)), что при $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a \leqslant u < v \leqslant b$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(a < m \leqslant M < b, u < W(1) < v) = \\
&\qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)) - \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)\right).
\end{aligned}$$

Поэтому для любого $t > 0$ при $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a \leqslant u < v \leqslant b$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(a < m(t) \leqslant M(t) < b, u < W(t) < v\right) = \\
&\qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(u + 2k(b-a) < N_t < v + 2k(b-a)\right) - \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}\left(2b - v + 2k(b-a) < N_t < 2b - u + 2k(b-a)\right).
\end{aligned} \tag{12.18}$$

Откуда получаем, что при $-\varepsilon \leqslant x < x + \Delta x \leqslant \gamma$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(-\varepsilon < m(a) \leqslant M(a) < \gamma, x < W(a) < x + \Delta x\right) = \\
&\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big[\mathsf{P}\left(x + 2k(\gamma+\varepsilon) < N_a < x + \Delta x + 2k(\gamma+\varepsilon)\right) - \\
&\quad\quad - \mathsf{P}\left(2\gamma - x - \Delta x + 2k(\gamma+\varepsilon) < N_a < 2\gamma - x + 2k(\gamma+\varepsilon)\right)\big] = \\
&\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big[n_a\left(x + 2k(\gamma+\varepsilon)\right) - \\
&\quad\quad - n_a\left(2\gamma - x + 2k(\gamma+\varepsilon)\right)\big]\Delta x + o\left(\Delta x\right) = \\
&\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big[n_a\left(x + 2k(\gamma+\varepsilon)\right) - \\
&\quad\quad - n_a\left(x + 2\varepsilon + 2k(\gamma+\varepsilon)\right)\big]\Delta x + o\left(\Delta x\right), \quad \Delta x \to 0.
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Из (12.17) и (12.19) следует, что

$$\mathsf{P}\Bigl(\sup_{t\in[0,a]} W^{\varepsilon}(t) < \gamma\Bigr) = \frac{1}{\mathsf{P}\,(m > -\varepsilon)} \int_{-\varepsilon}^{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bigl[n_a(x + 2k(\gamma+\varepsilon)) - \\ - n_a(x + 2\varepsilon + 2k(\gamma+\varepsilon))\bigr] \mathsf{P}\,(m(1-a) > -x-\varepsilon)\, dx,$$

откуда, учитывая (12.1) и (12.2) и применяя теорему о мажорируемой сходимости, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}\Bigl(\sup_{t\in[0,a]} W^{\varepsilon}(t) < \gamma\Bigr) = \\ = 2\int_0^{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x+2k\gamma}{a^{3/2}} e^{-\frac{(x+2k\gamma)^2}{2a}} N_{1-a}(0,x)\, dx. \tag{12.20}$$

Теперь перейдем к пределу при $a \to 0$. Найдем сначала предел члена, соответствующего $k = 0$:

$$\lim_{a\to 0} 2\int_0^{\gamma} \frac{x}{a^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2a}} N_{1-a}(0,x)\, dx = \\ = -2\lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\gamma} N_{1-a}(0,x) de^{-\frac{x^2}{2a}} = \\ = -2\lim_{a\to 0} \biggl(\frac{1}{\sqrt{a}} N_{1-a}(0,x) e^{-\frac{x^2}{2a}} \Big|_0^{\gamma} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi a(1-a)}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{x^2}{2a}}\, e^{-\frac{x^2}{2(1-a)}}\, dx \biggr) = \\ = 2\lim_{a\to 0} \int_0^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi a(1-a)}} e^{-\frac{x^2}{2a(1-a)}}\, dx = \\ = 2\lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{a(1-a)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1.$$

Пределы при $a \to 0$ остальных членов в правой части соотношения (12.20) равны 0. Таким образом, соотношение (12.16) и, следовательно, (12.15), (12.14) доказаны. Из соотношений (12.7), (12.8) и (12.14) следует (12.6).

Утверждение теоремы следует из соотношений (12.5), (12.6) ввиду теоремы 1.5.

Аналогично доказываются следующие две теоремы (см. [17]). Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_{\varepsilon}^{+} = \bigl\{W^{+} \,|\, W^{+}(1) \leqslant \varepsilon\bigr\}\,.$$

Теорема 12.2. *При* $\varepsilon \to 0$

$$W_\varepsilon^+ \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Смысл этой теоремы состоит в том, что последовательное применение двух ограничений к броуновскому движению: 1) находиться практически выше нуля при $t \in (0,1]$, 2) при $t = 1$ быть недалеко от нуля, – приводит к броуновской экскурсии. Интересно отметить, что если поменять порядок применения этих двух ограничений, то снова получится броуновская экскурсия, т.е. справедлив следующий результат. Положим при $\varepsilon > 0$

$$W_0^\varepsilon = \{W_0 \,|\, m_0 > -\varepsilon\},$$

где W_0 – броуновский мост, $m_0 = \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} W_0(t)$.

Теорема 12.3. *При* $\varepsilon \to 0$

$$W_0^\varepsilon \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Что будет, если оба указанных ограничения одновременно применить к броуновскому движению? В качестве задачи предлагается следующее утверждение: при $\varepsilon \to 0$

$$\{W \,|\, m > -\varepsilon, W(1) \leqslant \varepsilon\} \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Лекция 13
Принцип инвариантности Иглхарта

Рассмотрим еще один условный принцип инвариантности, носящий имя американского математика Иглхарта, много сделавшего в данной области теории вероятностей. Будем рассматривать случайное блуждание $S_0, S_1, \ldots$ при условии, что $S_1 > 0$, $S_2 > 0, \ldots, S_n > 0$. Введем *момент первого достижения отрицательной полуоси* $(-\infty, 0]$:

$$T = \inf\left\{n > 0\colon S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n \leqslant 0\right\}.$$

Описанное выше условие равносильно тому, что $T > n$. Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad t \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 13.1. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ – *независимые одинаково распределенные случайные величины, причем* $\mathsf{E}X_1 = 0, \mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *тогда при* $n \to \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0,1] \,|\, T > n\} \xrightarrow{D} W^+,$$

где W^+ – *броуновская извилина, знак* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D[0,1]$.

Существует несколько доказательств этой теоремы. В первом, данном Иглхартом (см. [20]), предполагается, что $\mathsf{E}|X_1|^3 < +\infty$. В доказательстве, данном Болтхаузеном (см. [15]), используется идея об одинаковом распределении случайных векторов

$$\{S_1, \ldots, S_n \,|\, T > n\} \text{ и } \left\{S_{T_n+1} - S_{T_n}, S_{T_n+2} - S_{T_n}, \ldots, S_{T_n+n} - S_{T_n}\right\},$$

где

$$T(n) = \inf\left\{k \geqslant 0\colon S_{k+i} > S_k \text{ для всех } i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Но в нем возникают сложности, связанные с идентификацией предельного процесса и W^+. Здесь предлагается новое доказательство, в котором центральную роль играет следующий результат (для простоты записи значок целой части для δn опускается).

Лемма 13.1. *Пусть* $\{S_i\}$ *– произвольное случайное блуждание, выходящее из точки* 0. *Рассмотрим его минимальное значение при* $i \in [0, \delta n]$, *где* $\delta \in (0,1)$, *и пусть* $T(\delta, n)$ *– момент последнего достижения этого минимального значения на* $[0, \delta n]$. *Положим* $S_i^* = S_{T(\delta,n)+i} - S_{T(\delta,n)}$, $i \in \mathbb{N}_0$. *Тогда случайные последовательности*

$$\{S_0^*, S_1^*, \ldots \mid S_i^* > 0,\ i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \ldots, n\}$$

и

$$\{S_0, S_1, \ldots \mid T > n\}$$

имеют одинаковое распределение.

Доказательство. Рассмотрим для простоты изложения один момент времени $i_0 \in \mathbb{N}$. Имеем для произвольного $a_0 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(S_{i_0}^* \leqslant a_0; S_i^* > 0,\ i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \ldots, n\right) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\delta n} \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\big(T(\delta, n) = k,\ S_k \in dx, S_{k+i_0} - S_k \leqslant a_0; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad S_{k+i} > S_k,\ i = n\delta - k + 1, \ldots, n\big).
\end{aligned}$$

Вероятность под знаком интеграла равна

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(S_k \leqslant S_i,\ i = 1, \ldots, k-1; S_k \in dx; S_i > S_k,\ i = k+1, \ldots, n\delta; \\
&\qquad S_{k+i_0} - S_k \leqslant a_0; S_i > S_k, i = n\delta + 1, \ldots, n+k\big) = \\
&\quad = \mathsf{P}(S_k \leqslant S_i, i = 1, \ldots, k-1; S_k \in dx) \times \\
&\qquad \mathsf{P}(S_i > S_k, i = k+1, \ldots, n+k; S_{k+i_0} - S_k \leqslant a_0).
\end{aligned}$$

Последняя вероятность не зависит от k и равна $P(S_{i_0} \leqslant a_0, T > n)$. Итак,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(S_{i_0}^* \leqslant a_0; S_i^* > 0,\ i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \ldots, n\right) = \\
&\quad = \mathsf{P}(S_{i_0} \leqslant a_0, T > n) \sum_{k=0}^{\delta n} \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(S_k \leqslant S_i,\ i = 1, \ldots, k-1; S_k \in dx\right).
\end{aligned}$$

Если убрать в этом соотношении событие $\left\{S_{i_0}^* \leqslant a_0\right\}$, то получим, что

$$\mathsf{P}\left(S_i^* > 0, i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \ldots, n\right) =$$

$$= \mathsf{P}(T > n) \sum_{k=0}^{\delta n} \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(S_k \leqslant S_i,\ i = 1, \ldots, k-1; S_k \in dx\right).$$

Разделив одно равенство на другое, находим, что

$$\mathsf{P}\left(S_{i_0}^* \leqslant a_0 \,|\, S_i^* > 0,\ i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \ldots, n\right) = \\ = \mathsf{P}\left(S_{i_0} \leqslant a_0 \,|\, T > n\right).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 13.1. Сначала докажем сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant 1$. Выберем произвольное число $\delta \in (0, t_1)$. В силу леммы 13.1 для произвольных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left(Y_n(t_i) \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m \,|\, T > n\right) = \\ &\quad = \mathsf{P}\left(\frac{S^*_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, m \,\middle|\, S_i^* > 0,\right. \\ &\qquad\qquad \left. i = \delta n - T(\delta, n) + 1, \ldots, n\right) = \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathsf{P}\left(\min_{i \leqslant \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}} \in dy, T(\delta, n) = k\right) \times \\ &\qquad \times \mathsf{P}\left(\frac{S^{**}_{\lfloor nt_i \rfloor - \delta n + k}}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant a_i + x - y,\right. \\ &\qquad\qquad \left. i = 1, \ldots, m \,\middle|\, \min_{i \leqslant n - \delta n + k} \frac{S_i^{**}}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\right), \end{aligned} \tag{13.1}$$

где $G = \{(x, y) \colon x \in (-\infty, 0], y \in \mathbb{R}\}$; $S_i^{**} = S^*_{\delta n - k + i} - S^*_{\delta n - k} = S_{\delta n + i} - S_{\delta n}$, $i \in \mathbb{N}_0$ (см. рис. 5). Очевидно, что последняя вероятность не изменится, если убрать звездочки.

Разобьем выражение в правой части (13.1) на два: в первом выражении подынтегральная функция умножается на $I\{(1/\sqrt{\delta}\,) \times (y - x) \notin [a, 1/a]\}$ (индикаторная функция двух переменных x и y), а во втором – умножается на $I\{(1/\sqrt{\delta}\,)(y - x) \in [a, 1/a]\}$, где a – произвольное число из интервала $(0, 1)$. Очевидно, первое

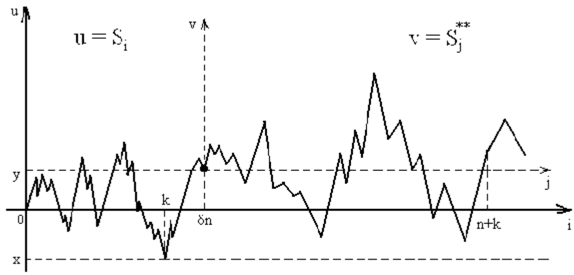

Рис. 5.

выражение не превосходит

$$\iint_G \mathsf{P}\biggl(\min_{i\leqslant\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}\in dx,\ \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}}\in dy\biggr) I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\notin\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}}-\min_{i\leqslant\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}\right)\notin\left[a,\frac{1}{a}\right]\right).$$

Но последняя вероятность по принципу инвариантности Прохорова–Донскера стремится при $n\to\infty$ к вероятности

$$\mathsf{P}\biggl(W(1)-\inf_{s\leqslant 1}W(s)\notin\left[a,\frac{1}{a}\right]\biggr),$$

предел которой при $a\to 0$ равен нулю. Таким образом, для справедливости доказываемого утверждения достаточно показать, что

$$\lim_{a\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G \mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}\biggl(A_k\ \bigg|\ \min_{i\leqslant n-\delta n+k}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\biggr)\times$$
$$\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\} = \mathsf{P}\left(W^+(t_i)\leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m\right) \tag{13.2}$$

где

$$
\begin{aligned}
A_k &= \left\{S_{\lfloor nt_i \rfloor - \delta n + k} / \left(\sigma\sqrt{n}\right) \leqslant a_i + x - y,\ i = 1, \ldots, m\right\},\\
B_k &= \left\{\min_{i \leqslant \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}} \in dy, T(\delta, n) = k\right\}
\end{aligned}
$$

Сумму в левой части (13.2) можно разбить на два выражения: в первом из них под знаком второй вероятности событие A_k пересекается с событием $\{w_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon\}$, а во втором – пересекается с событием $\{w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon\}$, где $w_x(\delta)$ – модуль непрерывности функции $x \in D[0,1]$, ε – положительное число. Тогда первое выражение не превосходит

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G &\mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon \,\middle|\, \min_{i \leqslant n - \delta n + k} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\right) \times\\
&\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \leqslant\\
\leqslant \iint_G &\mathsf{P}\Big(\min_{i \leqslant \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}} \in dy\Big) \times\\
&\times \frac{\mathsf{P}\big(w_{Y_n}(\delta) \geqslant \varepsilon, \min_{i \leqslant n - \delta n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\big)}{\mathsf{P}\big(\min_{i \leqslant n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\big)} \times\\
&\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

По принципу инвариантности Прохорова–Донскера правая часть стремится при $n \to \infty$ к

$$
\begin{aligned}
\iint_G &\mathsf{P}\Big(\inf_{s \leqslant \delta} W(s) \in dx, W(\delta) \in dy\Big) \times\\
&\times \frac{\mathsf{P}\big(w_W(\delta) \geqslant \varepsilon, \inf_{s \leqslant 1 - \delta} W(s) > x - y\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s \leqslant 1} W(s) > x - y\big)} \times\\
&\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,(y - x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} =\\
= \iint_G &\mathsf{P}\Big(\inf_{s \leqslant 1} W(s) \in \frac{dx}{\sqrt{\delta}}, W(1) \in \frac{dy}{\sqrt{\delta}}\Big) \times
\end{aligned}
$$

$$\times \frac{\mathsf{P}\big(w_W(\delta) \geqslant \varepsilon, \inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > x-y\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1} W(s) > x-y\big)} \times$$
$$\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\}$$

(равенство объясняется автомодельностью броуновского движения). Последнее выражение после замены $x/\sqrt{\delta}$ на x и $y/\sqrt{\delta}$ на y запишем в виде

$$\iint_G \mathsf{P}\left(\inf_{s\leqslant 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy\right) \times$$
$$\times \mathsf{P}\Big(w_W(\delta) \geqslant \varepsilon \;\Big|\; \inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\Big) \times$$
$$\times I\left\{y-x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \frac{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\big)}. \tag{13.3}$$

Теперь заметим, что при $\delta \leqslant \delta_0$

$$\mathsf{P}\Big(w_W(\delta) \geqslant \varepsilon \;\Big|\; \inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\Big(w_W(\delta_0) \geqslant \varepsilon \;\Big|\; \inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\Big) \overset{\delta\to 0}{\to}$$
$$\overset{\delta\to 0}{\to} \mathsf{P}\left(\omega_{W^+}(\delta_0) \geqslant \varepsilon\right) \overset{\delta_0\to 0}{\to} 0. \tag{13.4}$$

Здесь использованы теорема 12.1 и непрерывность траекторий броуновской извилины. Далее (см. соотношения (12.1) и (12.2)), при $\delta \to 0$ равномерно по $y-x$ таким, что $a \leqslant y-x \leqslant \frac{1}{a}$,

$$\frac{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1} W(s) > (x-y)\sqrt{\delta}\big)} \to 1. \tag{13.5}$$

Из соотношений (13.4) и (13.5) следует, что предел правой части (13.3) при $\delta \to 0$ равен нулю. Таким образом, для справедливости (13.2) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{a\to 0}\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathsf{P}(B_k) \times$$
$$\times \mathsf{P}\Big(A_k, w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \;\Big|\; \min_{i\leqslant n-\delta n+k} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\Big) \times$$

$$\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\} = \mathsf{P}\left(W^{+}(t_i)\leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m\right). \tag{13.6}$$

Заметим, между прочим, что нами практически доказано условие на модуль непрерывности:

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(w_{Y_n}(\delta)\geqslant\varepsilon\,|\,T>n\right) = \\ = \lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\Big(w_{Y_n^*}(\delta)\geqslant\varepsilon\ \Big| \\ S_i^*>0,\ i=\delta n-T(\delta,n)+1,\ldots,n\Big)=0, \tag{13.7}$$

где $Y^*(t)=S^*_{\lfloor nt\rfloor}/\,(\sigma\sqrt{n}\,)$. Действительно,

$$w_{Y_n^*}(\delta)\leqslant\frac{\max_{i\leqslant\delta n-T(\delta,n)}S_i^*}{\sigma\sqrt{n}}+w_{Y_n}\left(\delta;\delta,1+\delta\right)$$

(определение $w_x\left(\delta;a,b\right)$ дано в лекции 9). Поэтому

$$\mathsf{P}\Big(w_{Y_n^*}(\delta)\geqslant\varepsilon\ \Big|\ S_i^*>0,\ i=\delta n-T(\delta,n)+1,\ldots,n\Big)\leqslant \\ \leqslant P_1(\delta,n)+P_2(\delta,n),$$

где

$$P_1(\delta,n)=\mathsf{P}\left(\frac{\max_{i\leqslant\delta n-T(\delta,n)}S_i^*}{\sigma\sqrt{n}}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\ \right| \\ \left. S_i^*>0,\ i=\delta n-T(\delta,n)+1,\ldots,n\right),$$

$$P_2(\delta,n)=\mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta;\delta,1+\delta\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\ \right| \\ \left. S_i^*>0,\ i=\delta n-T(\delta,n)+1,\ldots,n\right).$$

Нетрудно понять, что

$$P_1(\delta,n)=\sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G\mathsf{P}\left(B_k,\max_{i\leqslant\delta n-k}\left(\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}-x\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant \\ \leqslant\sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G\mathsf{P}\left(B_k,\max_{i\leqslant\delta n}\left(\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}-x\right)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)=$$

$$= \mathsf{P}\left(\max_{i\leqslant\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} - \min_{i\leqslant\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{n\to\infty}{\to}$$

$$\overset{n\to\infty}{\to} \mathsf{P}\left(\sup_{s\leqslant\delta} W(s) - \inf_{s\leqslant\delta} W(s) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{\delta\to 0}{\to} 0.$$

Далее,

$$P_2(\delta,n) = \sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G \mathsf{P}(B_k)\mathsf{P}\left(w_{Y_n}(\delta) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \;\middle|\; \min_{i\leqslant n-\delta n+k}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right).$$

Выражение в правой части уже исследовалось (правда, предварительно его следует разбить на два выражения так, как это сделано с правой частью (13.1)). Используя приведенные ранее выкладки, получаем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} P_2(\delta,n) = 0.$$

Итак, соотношение (13.7) доказано.

Возвратимся к соотношению (13.6) и запишем оценку сверху для суммы в его левой части:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G \mathsf{P}(B_k)\frac{\mathsf{P}\left(\min_{i\leqslant n-\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right)}{\mathsf{P}\left(\min_{i\leqslant n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right)}\times \\
&\qquad\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times \\
&\qquad\times \mathsf{P}\left(\frac{S_{\lfloor nt_i\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant a_i + x - y + \varepsilon,\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\left. i=1,\ldots,m \;\middle|\; \min_{i\leqslant n-\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right) = \\
&\quad= \iint_G \mathsf{P}\left(\min_{i\leqslant\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}\in dx, \frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}}\in dy\right)\times \\
&\qquad\times\frac{\mathsf{P}\left(\min_{i\leqslant n-\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right)}{\mathsf{P}\left(\min_{i\leqslant n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right)} I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times \\
&\qquad\times \mathsf{P}\left(\frac{S_{\lfloor nt_i\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant a_i + x - y + \varepsilon,\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\left. i=1,\ldots,m \;\middle|\; \min_{i\leqslant n-\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\right).
\end{aligned}$$

Предел правой части при $n \to \infty$ равен

$$\iint_G \mathsf{P}\Big(\inf_{s\leqslant\delta} W(s)\in dx, W(\delta)\in dy\Big)\times$$
$$\times\frac{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > x-y\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1} W(s) > x-y\big)} I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times$$
$$\times\,\mathsf{P}\Big(W(t_i)\leqslant a_i + x - y + \varepsilon,$$
$$i=1,\ldots,m \;\Big|\; \inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > x-y\Big).$$

Последнее выражение не превосходит

$$\iint_G \mathsf{P}\Big(\inf_{s\leqslant 1} W(s)\in dx, W(1)\in dy\Big)\frac{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y)\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y)\big)}\times$$
$$\times\,\mathsf{P}\Big(W(t_i)\leqslant a_i + \sqrt{\delta}(x-y) + \varepsilon,$$
$$i=1,\ldots,m \;\Big|\; \inf_{s\leqslant 1-\delta} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y)\Big) \overset{\delta\to 0}{\to}$$
$$\overset{\delta\to 0}{\to} \iint_G \mathsf{P}\Big(\inf_{s\leqslant 1} W(s)\in dx, W(1)\in dy\Big)\times$$
$$\times\,\mathsf{P}\left(W^+(t_i)\leqslant a_i+\varepsilon,\ i=1,\ldots,m\right) \overset{\varepsilon\to 0}{\to}$$
$$\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathsf{P}\left(W^+(t_i)\leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m\right).$$

Здесь снова (при $\delta\to 0$) использованы теорема 11.1 и соотношение (13.5). Итак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G \mathsf{P}(B_k)\times$$
$$\times\,\mathsf{P}\Big(A, w_{Y_n}(\delta)<\varepsilon \;\Big|\; \min_{i\leqslant n-\delta n+k}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x-y\Big)\times$$
$$\times\, I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(W^+(t_i)\leqslant a_i,\ i=1,\ldots,m\right). \tag{13.8}$$

Запишем оценку снизу для суммы в левой части (13.6):

$$\sum_{k=0}^{\delta n}\iint_G \mathsf{P}(B_k)\frac{\mathsf{P}\big(\min_{i\leqslant n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\big)}{\mathsf{P}\big(\min_{i\leqslant n-n\delta}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\big)}\times$$
$$\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times$$
$$\times\mathsf{P}\bigg(\frac{S_{\lfloor nt_i\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant a_i+x-y-\varepsilon,\ i=1,\dots,m;$$
$$w_{Y_n}(\delta)<\varepsilon\ \bigg|\ \min_{i\leqslant n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\bigg)=$$
$$=\iint_G\mathsf{P}\bigg(\min_{i\leqslant\delta n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}\in dx,\frac{S_{\delta n}}{\sigma\sqrt{n}}\in dy\bigg)\times$$
$$\times\frac{\mathsf{P}\big(\min_{i\leqslant n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\big)}{\mathsf{P}\big(\min_{i\leqslant n-n\delta}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\big)}I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times$$
$$\times\mathsf{P}\bigg(\frac{S_{\lfloor nt_i\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant a_i+x-y-\varepsilon,\ i=1,\dots,m;$$
$$w_{Y_n}(\delta)<\varepsilon\ \bigg|\ \min_{i\leqslant n}\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}>x-y\bigg).$$

Предел правой части при $n\to\infty$ равен

$$\iint_G\mathsf{P}\Big(\inf_{s\leqslant\delta}W(s)\in dx,W(\delta)\in dy\Big)\times$$
$$\times\frac{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1}W(s)>x-y\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1-\delta}W(s)>x-y\big)}I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x)\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times$$
$$\times\mathsf{P}\Big(W(t_i)\leqslant a_i+x-y-\varepsilon,\ i=1,\dots,m;$$
$$w_W(\delta)<\varepsilon\ \Big|\ \inf_{s\leqslant 1}W(s)>x-y\Big).$$

Последнее выражение не меньше, чем

$$\iint_G\mathsf{P}\Big(\inf_{s\leqslant 1}W(s)\in dx,W(1)\in dy\Big)\times$$
$$\times\frac{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1}W(s)>\sqrt{\delta}(x-y)\big)}{\mathsf{P}\big(\inf_{s\leqslant 1-\delta}W(s)>\sqrt{\delta}(x-y)\big)}I\left\{y-x\in\left[a,\frac{1}{a}\right]\right\}\times$$

$$\times \mathsf{P}\Bigg(W(t_i) \leqslant a_i + \sqrt{\delta}(x-y) - \varepsilon,$$
$$i = 1,\ldots,m \Bigg| \inf_{s\leqslant 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y)\Bigg) -$$
$$- \mathsf{P}\Bigg(w_W(\delta) \geqslant \varepsilon \Bigg| \inf_{s\leqslant 1} W(s) > \sqrt{\delta}(x-y)\Bigg).$$

Нижний предел последнего выражения при $\delta \to 0$ не меньше (см. (13.4) и (13.5)), чем

$$\iint_G \mathsf{P}\Bigg(\inf_{s\leqslant 1} W(s) \in dx, W(1) \in dy\Bigg) I\left\{y - x \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \times$$
$$\times \mathsf{P}\left(W^+(t_i) \leqslant a_i - \varepsilon,\ i = 1,\ldots,m\right) \overset{a\to 0}{\to}$$
$$\overset{a\to 0}{\to} \mathsf{P}\left(W^+(t_i) \leqslant a_i - \varepsilon, i = 1,\ldots,m\right) \overset{\varepsilon\to 0}{\to}$$
$$\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathsf{P}\left(W^+(t_i) \leqslant a_i,\ i = 1,\ldots,m\right).$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{a\to 0} \liminf_{\delta\to 0} \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\delta n} \iint_G \mathsf{P}(B_k) \times$$
$$\times \mathsf{P}\Bigg(A_k, w_{Y_n}(\delta) < \varepsilon \Bigg| \min_{i\leqslant n-\delta n+k} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} > x - y\Bigg) \times$$
$$\times I\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}}(y-x) \in \left[a, \frac{1}{a}\right]\right\} \geqslant \mathsf{P}\left(W^+(t_i) \leqslant a_i,\ i = 1,\ldots,m\right). \tag{13.9}$$

Из соотношений (13.8) и (13.9) вытекают соотношение (13.6) и, следовательно, (13.2). Из (13.2) и (13.7), ввиду теоремы 2.3, получаем утверждение доказываемой теоремы.

Лекция 14
Тождества Спарре–Андерсена и Спицера

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – произвольная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ранее был введем момент первого достижения полуоси $(-\infty, 0]$ этим случайным блужданием:

$$T = \min\{n > 0 \colon S_n \leqslant 0\}.$$

T называют также *первым слабым нижним лестничным моментом* и обозначают T_1. Положим

$$T_2 = \min\{n > T_1 \colon S_n \leqslant S_{T_1}\}.$$

Это *второй слабый нижний лестничный момент*. Аналогично вводятся моменты $T_3, T_4, \ldots$ (см. рис. 6).

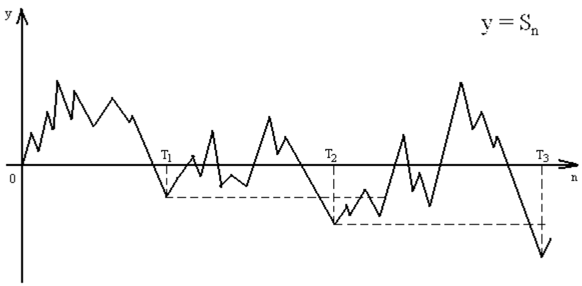

Рис. 6.

Очевидно, пары случайных величин (T_1, S_{T_1}), $(T_2 - T_1, S_{T_2} - S_{T_1}), \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными.

Наряду со слабыми нижними лестничными моментами можно рассматривать *строгие нижние лестничные моменты*:

$$T' := T'_1 = \min\{n > 0 \colon S_n < 0\},$$
$$T'_2 = \min\left\{n > T'_1 \colon S_n < S_{T'_1}\right\}, \quad \ldots.$$

Кроме того, рассматривают *строгие и слабые верхние лестничные моменты* $\tau_1, \tau_2, \dots$ и $\tau'_1, \tau'_2, \dots$ соответственно. Например,

$$\tau := \tau_1 = \min\{n > 0 \colon S_n > 0\}.$$

Моменты $\tau_1, \tau_2, \dots$ – это последовательные моменты времени, в которые случайное блуждание достигает строгих рекордных верхних значений (строго превосходящих все предыдущие значения), а $S_{T_1}, S_{T_2}, \dots$ – значения этих рекордов.

Установим два *тождества Спарре–Андерсена*, открытые в середине прошлого столетия и вызвавшие быстрый прогресс в теории случайных блужданий (называемой также *теорией флуктуаций*).

Теорема 14.1. *При* $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right].$$

Доказательство. Наряду со случайной последовательностью $X_1, \dots, X_n$ рассмотрим для каждого $i = 1, \dots, n$ ее циклическую перестановку

$$X_i, X_{i+1}, \dots, X_n, X_1, X_2, \dots, X_{i-1}.$$

Построим по этой перестановке обычным образом случайное блуждание $S_1^{(i)}, \dots, S_n^{(i)}$ ($S_0^{(i)} = 0$), которое называется i-м *перестановочным случайным блужданием* исходного блуждания $S_0, S_1, \dots, S_n$. Очевидно, что все перестановочные случайные блуждания распределены также, как исходное, и совокупность перестановочных блужданий каждого перестановочного блуждания совпадает с совокупностью перестановочных блужданий исходного блуждания. Пусть $\tau_r^{(i)}$ означает r-й строгий верхний лестничный момент блуждания $S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \dots, S_n^{(i)}$. Важно заметить, что если в момент времени n случайное блуждание достигает своего r-го рекордного значения, то еще $r - 1$ его перестановочных случайных блужданий обладают этим же свойством (доказательство предоставляется читателю). Поэтому либо существует ровно r натуральных чисел $i_1, \dots, i_r$ от 1 до n, для которых $\tau_r^{(i_1)} = n$, $\dots$, $\tau_r^{(i_r)} = n$, либо не существует ни одного такого числа.

Кроме того, очевидно, что $S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = \dots = S_n^{(n)}$.

Рассмотрим при положительном a вероятность $\mathsf{P}(\tau_r = n, 0 < S_n \leqslant a)$. Введем случайные величины

$$\xi_i = I\big\{\tau_r^{(i)} = n,\ 0 < S_n^{(i)} \leqslant a\big\}, \quad i = 1, \dots, n$$

(как обычно, $I\{\dots\}$ – индикатор случайного события $\{\dots\}$). Очевидно, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ – одинаково распределенные случайные величины, поэтому

$$\mathsf{P}(\tau_r = n, 0 < S_n \leqslant a) = \mathsf{E}\xi_1 = \frac{1}{n}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{n}\xi_i. \tag{14.1}$$

В силу сказанного случайная величина $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ принимает два значения: r и 0, поэтому

$$\mathsf{E}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = r\mathsf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = r). \tag{14.2}$$

Пусть $S_n > 0$ и i_0 – момент первого достижения максимума для последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n$. Тогда $S_n^{(i_0+1)} > S_i^{(i_0+1)}$ для любого $i = 1, \dots, n-1$ и, следовательно, n является r-м строгим верхним лестничным моментом для некоторого $r \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\{0 < S_n \leqslant a\} = \bigcup_{r=1}^{\infty}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = r\}$$

и, значит,

$$\mathsf{P}(0 < S_n \leqslant a) = \sum_{r=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = r). \tag{14.3}$$

Из соотношений (14.1)–(14.3) следует, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\mathsf{P}(\tau_r = n,\ 0 < S_n \leqslant a) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{rn}\mathsf{E}\sum_{i=1}^{n}\xi_i =$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{rn}r\mathsf{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = r) = \frac{1}{n}\mathsf{P}(0 < S_n \leqslant a).$$

Переходя к преобразованиям Лапласа, получаем, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n\right) = \frac{1}{n}\mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right).$$

Умножим обе части на s^n и просуммируем по всем $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right). \quad (14.4)$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n\right) &= \mathsf{E}\left(s^{\tau_r} e^{-\lambda S_{\tau_r}}; \tau_r < +\infty\right) = \\ &= \mathsf{E}\Big(s^{\tau_1} e^{-\lambda S_{\tau_1}} I\left\{\tau_1 < +\infty\right\} s^{\tau_2 - \tau_1} \times \\ &\qquad \times e^{-\lambda\left(S_{\tau_2} - S_{\tau_1}\right)} I\left\{\tau_2 - \tau_1 < +\infty\right\} \ldots s^{\tau_r - \tau_{r-1}} \times \\ &\qquad \times e^{-\lambda(S_{\tau_r} - S_{\tau_{r-1}})} I\left\{\tau_r - \tau_{r-1} < +\infty\right\}\Big) = \\ &= \left(\mathsf{E}\left(s^{\tau} e^{-\lambda S_\tau}; \tau < +\infty\right)\right)^r. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Поэтому левая часть (14.4) равна

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\mathsf{E}\left(s^\tau e^{-\lambda S_\tau}; \tau < +\infty\right)\right)^r = -\ln\left(1 - \mathsf{E}\left(s^\tau e^{-\lambda S_\tau}; \tau < +\infty\right)\right).$$

Итак,

$$\ln\left(1 - \mathsf{E}\left(s^\tau e^{-\lambda S_\tau}; \tau < +\infty\right)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание 14.1. Аналогичные утвержения справедливы для T, T', τ'. Например, при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{\lambda S_n}; T = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n \leqslant 0\right)\right].$$

Теорема 14.2. *При* $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right].$$

Доказательство. Чуть раньше (см. соотношение (14.5)) было установлено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n\right) = \left(\mathsf{E}\left(s^\tau e^{-\lambda S_\tau}; \tau < +\infty\right)\right)^r.$$

Поэтому в силу теоремы 14.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau_r = n\right) = \left(1 - \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right]\right)^r. \tag{14.6}$$

Поскольку

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} \{\tau_r = n\} = \{S_n > 0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}\},$$

то, складывая соотношения (14.6) при разных $r = 1, 2, \ldots$, получаем, что

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}\right) = \\ = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right]. \tag{14.7}$$

Рассмотрим наряду с последовательностью случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ последовательность $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1$ и построим по ней обычным образом (выходящее из нуля) случайное блуждание $\widetilde{S}_0$, $\widetilde{S}_1, \ldots, \widetilde{S}_n$ (см. рис. 7). Это блуждание называется *двойственным* к блужданию $S_0, S_1, \ldots, S_n$, и оно имеет такое же распределение, как $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

Очевидно, что $S_n = \widetilde{S}_n$ и

$$\{S_n > S_0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}\} = \{\widetilde{S}_1 > 0, \widetilde{S}_2 > 0, \ldots, \widetilde{S}_n > 0\}.$$

Итак,

$$\mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}\right) = \\ = \mathsf{E}\left(e^{-\lambda \widetilde{S}_n}; \widetilde{S}_1 > 0, \widetilde{S}_2 > 0, \ldots, \widetilde{S}_n > 0\right) = \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right). \tag{14.8}$$

Из (14.7) и (14.8) следует утверждение теоремы.

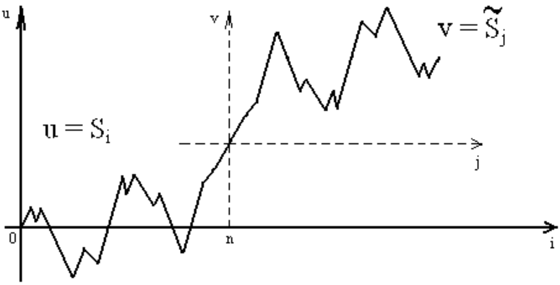

Рис. 7.

Замечание 14.2. Аналогичные утверждения справедливы для T', τ, τ'. Например, при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{\lambda S_n}; \tau > n\right) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{\lambda S_n}; S_n \leqslant 0\right)\right].$$

Приступим к доказательству *тождества Спицера.* Положим

$$M_n = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} S_i.$$

Теорема 14.3. *При* $\lambda, \mu > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{E}\, e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} =$$
$$= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left(\mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right) + \mathsf{E}\left(e^{\mu S_n}; S_n \leqslant 0\right)\right)\right].$$

В частности, при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{E}\, e^{-\lambda M_n} = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\, e^{-\lambda S_n^+}\right],$$

где $S_n^+ = \max(S_n, 0)$.

Доказательство. Рассмотрим момент первого достижения максимума для случайной последовательности $S_0, S_1, \ldots, S_n$:

$$T_n = \min\,(k \geqslant 0\colon S_k = M_n)\,.$$

Имеем, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\big(e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)}; T_n = k\big) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\big(e^{-\lambda S_k - \mu(S_k - S_n)}; T_n = k\big) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\big(e^{-\lambda S_k - \mu(S_k - S_n)}; S_k > S_0, S_k > S_1, \ldots \\
&\qquad \ldots, S_k > S_{k-1}, S_k \geqslant S_{k+1}, \ldots, S_k \geqslant S_n\big) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}(e^{-\lambda S_k}; S_k > S_0, S_k > S_1, \ldots, S_k > S_{k-1}) \times \\
&\qquad \times \mathsf{E}(e^{-\mu(S_k - S_n)}; S_k \geqslant S_{k+1}, \ldots, S_k \geqslant S_n)
\end{aligned}$$

(здесь использовано марковское свойство случайного блуждания). Ранее было показано (см. соотношение (14.8)), что первое математическое ожидание в последнем выражении равно $\mathsf{E}\,(\exp\,(-\lambda S_k)\,; T > k)$. Аналогично устанавливается, что второе математическое ожидание в последнем выражении равно $\mathsf{E}\,(\exp\,(\mu S_{n-k})\,; \tau > n-k)$. Итак,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\,(\exp\,(-\lambda S_k)\,; T > k) \times \\
\times \mathsf{E}\,(\exp\,(\mu S_{n-k})\,; \tau > n-k)\,.
\end{aligned}$$

Умножим обе части на s^n и просуммируем по всем $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{E}\, e^{-\lambda M_n - \mu(M_n - S_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathsf{E}\,(\exp\,(-\lambda S_k)\,; T > k) \times \\
\times \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathsf{E}\,(\exp\,(\mu S_l)\,; \tau > l)\,.
\end{aligned}$$

Осталось вспомнить теорему 14.2 и замечание 14.2. Теорема доказана.

Лекция 15
Приложения тождеств Спарре–Андерсена и Спицера

Напомним некоторые факты (теоремы A, B, C) из теории степенных рядов (см. [7, т. 2, гл. 13, § 5]), используемые в дальнейшем.

Теорема A (Абель). *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ *сходится равномерно по* $s \in [0,1]$ *и*

$$\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Если $a_n \geqslant 0$ *при* $n \in \mathbb{N}_0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, *то* $\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = +\infty$.

Теорема B (Таубер). *Если* $a_n = o(1/n)$ *при* $n \to \infty$ *и существует* $\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = S$, *то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится и* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Определение 15.1. Числовая функция $L(x)$, определенная при $x \in (0,+\infty)$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если при любом фиксированном $x > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} L(tx)/L(t) = 1.$$

Теорема C. *Пусть* $a_n \geqslant 0$ *при* $n \in \mathbb{N}_0$ *и ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ *сходится при* $s \in [0,1)$. *Обозначим его сумму* $Q(s)$. *При* $\rho \in [0,+\infty)$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) $Q(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}} L\big(\frac{1}{1-s}\big)$ *при* $s \uparrow 1$;

2) $S_n = a_0 + \dots + a_{n-1} \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n)$ *при* $n \to \infty$.

Если же последовательность $\{a_n\}$ *монотонна и* $\rho \in (0,+\infty)$, *то эти утверждения эквивалентны следующему*:

3) $a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n)$ *при* $n \to \infty$.

Здесь $L(x)$ – *медленно меняющаяся на бесконечности функция.*

Целью данной лекции является изучение асимптотических свойств распределений первых лестничных моментов и максимума случайного блуждания.

Теорема 15.1. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда*

1) *случайные величины* τ *и* τ', T *и* T' *являются собственными;*

2) *сходятся числовые ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{P}(S_n = 0)}{n} := c_0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\mathsf{P}\left(S_n > 0\right) - \frac{1}{2}\right] := c;$$

3) *справедливы равенства*

$$\mathsf{E}S_\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\, e^{-c}, \qquad \mathsf{E}S_{\tau'} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\, e^{-(c+c_0)},$$
$$\mathsf{E}S_T = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\, e^{c}, \qquad \mathsf{E}S_{T'} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\, e^{c+c_0}.$$

Доказательство. Запишем тождества Спарре-Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right], \tag{15.1}$$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau' = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n \geqslant 0\right)\right]. \tag{15.2}$$

Все ряды в этих соотношениях мажорируются по λ сходящимися числовыми рядами. Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$ в (15.2):

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{P}\left(\tau' = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}(S_n \geqslant 0)\right].$$

А теперь перейдем к пределу при $s \uparrow 1$, используя теорему A:

$$1 - \mathsf{P}\left(\tau' < +\infty\right) = 0 \implies \mathsf{P}\left(\tau' < +\infty\right) = 1,$$

т.к. $\mathsf{P}(S_n \geqslant 0) \sim 1/2$ при $n \to \infty$. Это означает, что τ' – собственная случайная величина. Аналогично доказательство для τ, T, T'.

Перейдем в (15.2) к пределу при $\lambda \to \infty$:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{P}\left(S_{\tau'} = 0, \tau' = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}(S_n = 0)\right].$$

А теперь перейдем к пределу при $s \to 1$, используя теорему A:

$$1 - \mathsf{P}\left(S_{\tau'} = 0\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}(S_n = 0)\right].$$

Левая часть положительна, поэтому сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \times \mathsf{P}(S_n = 0)$.

Продифференцируем (15.1) по λ: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(S_n e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right) = \\ = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(S_n\, e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right). \tag{15.3}$$

Все ряды в этом соотношении мажорируются по λ сходящимися числовыми рядами. Для обоснования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (s^n/n)\, \mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right)$ заметим, что

$$\mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right) = \sigma\sqrt{n}\, \mathsf{E}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}; \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > 0\right).$$

В силу центральной предельной теоремы (строгий вывод рекомендуется провести читателю)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}; \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > 0\right) = \mathsf{E}\left(N; N > 0\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

поэтому

$$\mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right) \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{n}, \qquad n \to \infty, \tag{15.4}$$

и, следовательно, рассматриваемый ряд сходится при $|s| < 1$. Перейдем в (15.3) к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(S_n; \tau = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}(S_n > 0)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right). \tag{15.5}$$

Учитывая, что при $|s| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-s}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-s)\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{2n}\right),$$

перепишем (15.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(S_n; \tau = n\right) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\left[\mathsf{P}\left(S_n > 0\right) - \frac{1}{2}\right]\right\}\times \\ \times \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right)}{(1-s)^{-1/2}}. \qquad (15.6)$$

Перейдем в (15.6) к пределу при $s \uparrow 1$. Найдем предел левой части, используя теорему A:

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(S_n; \tau = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}\left(S_n; \tau = n\right) = \\ = \mathsf{E}\left(S_\tau; \tau < +\infty\right) = \mathsf{E}S_\tau > 0 \qquad (15.7)$$

(неравенство выполняется, т.к. $S_\tau > 0$ при $\tau < +\infty$). Далее, ввиду (15.4), при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathsf{E}\left(S_k; S_k > 0\right)}{k} \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}\,.$$

Поэтому ввиду теоремы C

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{1-s}}\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{1-s}}, \qquad s \uparrow 1,$$

и

$$\lim_{s\uparrow 1}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\mathsf{E}\left(S_n; S_n > 0\right)}{(1-s)^{-1/2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}. \qquad (15.8)$$

Из (15.6)-(15.8) следует, что существует

$$\lim_{s\uparrow 1}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\left[\mathsf{P}\left(S_n > 0\right) - \frac{1}{2}\right]\right\} = b > 0 \qquad (15.9)$$

и

$$\mathsf{E}S_\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}b. \tag{15.10}$$

Покажем, что $b \neq +\infty$. Доказательство проведем от противного. Пусть $b = +\infty$. Тогда

$$\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\left[-\mathsf{P}\left(S_n>0\right)+\frac{1}{2}\right]=+\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\left[-\mathsf{P}\left(S_n<0\right)+\frac{1}{2}\right]=-\infty. \tag{15.11}$$

Здесь учтено что сумма этих двух рядов имеет конечный предел, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\,\mathsf{P}(S_n=0)$ сходится. Рассмотрим *обращенное* случайное блуждание $\{S_n^*\}$ с шагами $-X_1, -X_2, \ldots$. Пусть τ^* – момент первого достижения этим блужданием полуоси $(0,+\infty)$. Тогда (15.11) означает, что

$$\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\left[-\mathsf{P}\left(S_n^*>0\right)+\frac{1}{2}\right]=-\infty,$$

что противоречит соотношению (15.9) для $\{S_n^*\}$.

Применим к (15.9) теорему B:

$$b=\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\mathsf{P}(S_n>0)-\frac{1}{2}\right]\right\}=e^{-c},$$

откуда, вспоминая (15.10), получаем, что

$$\mathsf{E}S_\tau=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\,e^{-c}.$$

Оставшиеся соотношения устанавливаются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 15.2. *Пусть* $\mathsf{E}X_1=0$, $\mathsf{E}X_1^2:=\sigma^2$, $0<\sigma^2<+\infty$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathsf{P}(T>n)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{c}\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad \mathsf{P}\left(\tau>n\right)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Ограничимся первым утверждением. Запишем тождество Спарре–Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right].$$

Все ряды в этом соотношении мажорируются по λ сходящимися числовыми рядами. Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{P}(T > n) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}(S_n > 0)\right] =$$

$$= \frac{\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n}\left[\mathsf{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2}\right]\right\}}{\sqrt{1-s}}.$$

По теореме 15.1 правая часть при $s \uparrow 1$ эквивалентна $e^c/\sqrt{1-s}$. Поскольку последовательность $\{\mathsf{P}(T > n)\}$ монотонна по n, то по теореме C при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(T > n) \sim \frac{1}{\Gamma(1/2)}\, e^c \frac{1}{\sqrt{n}},$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Замечание 15.1. Итак, доказано, что в условиях теоремы 15.2 при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(T > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \qquad \mathsf{P}\left(\tau > n\right) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}},$$

причем $c_1 \mathsf{E} S_\tau = \sigma/\sqrt{2\pi}$, $c_2 \mathsf{E} S_T = \sigma/\sqrt{2\pi}$, $c_1 c_2 = 1/\pi$.

Теорема 15.3. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда для любого* $x \geqslant 0$ *при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(M_n \leqslant x\right) \sim \frac{e^{-c}}{\sqrt{\pi}} u(x) \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где $u(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_{\tau_i} \leqslant x\right)$.

Доказательство. Запишем тождество Спицера: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{E}\, e^{-\lambda M_n} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\, e^{-\lambda S_n^+}\right) =$$

$$= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right] \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}\left(S_n \leqslant 0\right)\right]. \tag{15.12}$$

Первый множитель в правой части по тождеству Спарре–Андерсена равен

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} u_s\left(dx\right), \tag{15.13}$$

где

$$u_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{P}\left(S_n \leqslant x; T > n\right).$$

Из (15.12) и (15.13) следует, что при $x \geqslant 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{P}\left(M_n \leqslant x\right) = u_s(x) \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}\left(S_n \leqslant 0\right)\right]. \tag{15.14}$$

Используя теорему A и переход к двойственному случайному блужданию, получаем, что

$$\begin{aligned}
\lim_{s\uparrow 1} u_s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_n \leqslant x; T > n\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_n > S_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1; S_n \leqslant x\right) = \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_{\tau_i} \leqslant x\right) = u(x).
\end{aligned} \tag{15.15}$$

Можно показать, что функция $u(x)$ конечна при любом $x \geqslant 0$ (см. окончание лекции). Что касается второго множителя в правой части (15.14), то

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}\left(S_n \leqslant 0\right)\right] = \\
&\quad = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{2n}\right) \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \left[\mathsf{P}\left(S_n \leqslant 0\right) - \frac{1}{2}\right]\right\} \sim \\
&\quad \sim \frac{e^{-c}}{\sqrt{1-s}}, \qquad s \to 1.
\end{aligned}$$

Итак, правая часть (15.14) при $s \uparrow 1$ эквивалентна $e^{-c}u(x)/\sqrt{1-s}$. Откуда по теореме C, учитывая монотонность последовательности $\{\mathsf{P}\,(M_n \leqslant x)\}$, получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем потребуется также оценка сверху для $\mathsf{P}(M_n \leqslant x)$: в условиях теоремы 15.3 существует такая положительная постоянная K, не зависящая от x и n, что при всех $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{P}\,(M_n \leqslant x) \leqslant \frac{Ku(x)}{\sqrt{n}}. \tag{15.16}$$

Действительно, из (15.14), (15.15) и монотонности $u_s(x)$ по s следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathsf{P}\,(M_n \leqslant x) \leqslant u(x) \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{P}\,(S_n \leqslant 0)\right] = \frac{u(x)h(s)}{\sqrt{1-s}},$$

где $h(s) = \exp\bigl\{\sum_{n=1}^{\infty} (s^n/n)\,[\mathsf{P}\,(S_n \leqslant 0) - (1/2)]\bigr\}$. При $s = 1 - 1/n$ ввиду монотонности $\mathsf{P}\,(M_n \leqslant x)$ по n находим, что

$$\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \mathsf{P}\,(M_n \leqslant x) \leqslant \sum_{\frac{n}{2} \leqslant k \leqslant n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \mathsf{P}\,(M_k \leqslant x) \leqslant$$
$$\leqslant u(x)\sqrt{n}\, h\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Осталось учесть, что $h\,(1 - (1/n))$ имеет конечный предел при $n \to \infty$.

Заметим, что функция $u(x)$ (при $x < 0$ она полагается равной 0) является *функцией восстановления* для неубывающей случайной последовательности $0, S_{\tau_1}, S_{\tau_2}, \ldots$. Из теории восстановления (см. [2, гл. 9]) известно, что, во-первых, функция $u(x)$ конечна при всех $x \in \mathbb{R}$ и, во-вторых, в условиях теоремы 15.3 при $x \to +\infty$

$$u(x) = x/ES_\tau + O(1). \tag{15.17}$$

Кроме того, функция $u(x)$ является *гармонической функцией* в следующем смысле:

$$\mathsf{E}u(x - X_1) = u(x), \quad x \geqslant 0. \tag{15.18}$$

Действительно, при $x > 0$

$$\mathsf{P}\,(S_{n+1} \leqslant x; T > n+1) = \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\,(S_n \in dy; T > n) \int_{-y}^{x-y} dF(z),$$

где $F(z)$ – функция распределения случайной величины X_1. Поэтому складывая по всем $n \in \mathbb{N}_0$ и используя (15.15) и теорему Фубини, получаем, что

$$u(x) - 1 = \int_0^{+\infty} du(y) \int_{-y}^{x-y} dF(z) = \int_{-\infty}^{x} dF(z) \int_{-z}^{x-z} du(y) = \\ = \int_{-\infty}^{x} u(x-z)\, dF(z) - \int_{-\infty}^{0} u(-z)\, dF(z).$$

Аналогично показывается, что

$$\int_{-\infty}^{0} u(-z)\, dF(z) = 1.$$

Следовательно,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{0} u(x-z)\, dF(z),$$

что и означает справедливость (15.18).

Лекция 16
Условная локальная предельная теорема и ее применение

Ранее (см. лекцию 8) рассматривалась локальная предельная теорема Стоуна: если $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, и распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым, то при $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathsf{P}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta\right]\right) = \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + o(1)\right) \quad (16.1)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число (в решетчатом случае Δ кратно максимальному шагу распределения X_1).

Наша цель – доказать условную (при условии, что $T > n$) локальную предельную теорему.

Теорема 16.1. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *и распределение* X_1 *является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым, тогда при* $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\mathsf{P}\big(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta\right] \bigm| T > n\big) = \Delta\big(xe^{-\frac{x^2}{2}} + o(1)\big) \quad (16.2)$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$ *и* $\Delta \in (0, b)$, *где* a, b *– произвольные положительные числа (в решетчатом случае* Δ *кратно максимальному шагу распределения* X_1*).*

Замечание 16.1. Смысл этой теоремы прост: распределение случайной величины $\left\{S_n/(\sigma\sqrt{n}) \bigm| T > n\right\}$ при больших n мало отличается, ввиду принципа инвариантности Иглхарта, от распределения случайной величины $W^+(1)$, поэтому

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(x, x + \frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right] \biggm| T > n\right) \approx p_1(x)\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}},$$

где $p_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность вероятностей случайной величины $W^+(1)$ (см. теорему 11.1).

Лемма 16.1. *В условиях теоремы 16.1 при* $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}\,y)}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right], T > n\right) =$$
$$= \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}\right) + o(1)$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$ *и* $\Delta \in (0, b)$, *где* a, b – *произвольные положительные числа.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и запишем представление при $x, y, \Delta \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}x, \sigma\sqrt{n}x + \Delta\right], T > n\right) = \\ = P_1(n) - \left[P_2(n,\varepsilon) + P_3(n,\varepsilon)\right],\end{aligned} \tag{16.3}$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n) &= \mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,y\right)}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right]\right), \\ P_2(n,\varepsilon) &= \mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,y\right)}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right], T \leqslant (1-\varepsilon)n\right), \\ P_3(n,\varepsilon) &= \mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,y\right)}\left(S_n \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right], (1-\varepsilon)n < T \leqslant n\right). \end{aligned}$$

По теореме Стоуна при $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n}P_1(n) = \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} + o(1)\right) \tag{16.4}$$

равномерно по $x, y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число.

Запишем представление для $P_2(n,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} &\sigma\sqrt{n}\,P_2(n,\varepsilon) = \\ &\quad = \sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,y\right)}\left(S_n \in (\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta], \min_{i \leqslant (1-\varepsilon)n} S_i \leqslant 0\right) = \\ &\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,y\right)}\left(\min_{i \leqslant (1-\varepsilon)n} S_i \leqslant 0, S_{(1-\varepsilon)n} \in \sigma\sqrt{n}\,dz\right) \times \\ &\qquad \times \sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,z\right)}\left(S_{\varepsilon n} \in \left(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\right]\right). \end{aligned}$$

Откуда по теореме Стоуна и принципу инвариантности Прохорова–Донскера при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}_2(n,\varepsilon) = \\ &\quad = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}^{\left(\sigma\sqrt{n}\,y\right)}\left(\min_{i \leqslant (1-\varepsilon)n} S_i \leqslant 0, S_{(1-\varepsilon)n} \in \sigma\sqrt{n}\,dz\right) \times \\ &\qquad \times \left(e^{-\frac{(x-z)^2}{2\varepsilon}} + o(1)\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}^{(y)}\big(m(1-\varepsilon) \leqslant 0, W(1-\varepsilon) \in dz\big) e^{-\frac{(x-z)^2}{2\varepsilon}} + o(1) \tag{16.5}$$

равномерно по $x, y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где b – произвольное положительное число. Запишем представление:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{P}^{(y)}\big(m(1-\varepsilon) \leqslant 0, W(1-\varepsilon) \in dz\big) e^{-\frac{(x-z)^2}{2\varepsilon}} =$$
$$= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon), \tag{16.6}$$

где в $I_1(\varepsilon)$ интегрирование ведется от 0 до $+\infty$, а в $I_2(\varepsilon)$ – от $-\infty$ до 0. Нетрудно показать, что при любых $t \in (0, 1)$, $y \in (0, +\infty)$

$$\mathsf{P}^{(y)}(m(t) \leqslant 0, W(t) \in dz) = \begin{cases} \mathsf{P}^{(-y)}(W(t) \in dz), & z > 0; \\ \mathsf{P}^{(y)}(W(t) \in dz), & z < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$I_1(\varepsilon) = \mathsf{P}^{(-y)}(W(1-\varepsilon) > 0, W(1) \in dx)/dx \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}, \tag{16.7}$$

$$I_2(\varepsilon) = \mathsf{P}^{(y)}(W(1-\varepsilon) < 0, W(1) \in dx)/dx \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0, \tag{16.8}$$

при этом (16.7) и (16.8) выполняются равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$, где a – произвольное положительное число. Из (16.5)–(16.8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sigma\sqrt{n}\mathsf{P}_2(n, \varepsilon) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}, \tag{16.9}$$

причем каждый из пределов слева равномерен по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$, $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Чтобы оценить $\mathsf{P}_3(n, \varepsilon)$, рассмотрим случайное блуждание $\{S_i^*\}$, являющееся обращенным для двойственного к $\{S_i\}$ случайного блуждания, т.е. $S_i^* = -(S_n - S_{n-i})$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда

$$\mathsf{P}_3(n, \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}\,x)}\Big(S_n^* \in \big[\sigma\sqrt{n}\,y - \Delta, \sigma\sqrt{n}\,y\big), \min_{i\leqslant\varepsilon n} S_i^* \leqslant 0\Big).$$

Но правая часть после умножения на $\sigma\sqrt{n}$ есть (см. вывод (16.5))

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi(1-\varepsilon)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathsf{P}^{(x)}\left(m\left(\varepsilon\right)\leqslant 0, W\left(\varepsilon\right)\in dz\right)e^{-\frac{(y-z)^2}{2(1-\varepsilon)}}+o(1)$$

при $n\to\infty$ равномерно по $x,y\in(0,+\infty)$, $\Delta\in(0,b)$, где b – произвольное положительное число, причем первое слагаемое в последнем выражении равно

$$\Delta\cdot\mathsf{P}^{(x)}\left(m\left(\varepsilon\right)\leqslant 0, W(1)\in dy\right)/dy\overset{\varepsilon\to 0}{\to}0$$

равномерно по $x\in(a,+\infty)$, $y\in(0,+\infty)$, $\Delta\in(0,b)$, где a, b – произвольные положительные числа. Итак, для некоторой числовой функции $f\left(n,\varepsilon\right)$, зависящей также от параметров x,y,Δ, при всех $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$

$$\sigma\sqrt{n}\mathsf{P}_3\left(n,\varepsilon\right)\leqslant f\left(n,\varepsilon\right)\quad\text{и}\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}f\left(n,\varepsilon\right)=0,\tag{16.10}$$

причем каждый из пределов равномерен по $x\in(a,+\infty)$, $y\in(0,+\infty)$, $\Delta\in(0,b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Из соотношений (16.3), (16.4), (16.9), (16.10) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 16.1. Зафиксируем $\delta\in(0,1)$ и запишем представление при $x,\Delta\in(0,+\infty)$:

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}\big(S_n\in(\sigma\sqrt{n}\,x,\sigma\sqrt{n}\,x+\Delta]\bigm| T>n\big)&=\\=\int_0^{+\infty}\mathsf{P}\big(S_{\delta n}\in\sigma\sqrt{n}\,dy\bigm| T>\delta n\big)\sigma\sqrt{n}\times&\\\times\mathsf{P}^{(\sigma\sqrt{n}y)}\left(S_{(1-\delta)n}\in\big(\sigma\sqrt{n}x,\sigma\sqrt{n}x+\Delta\big];T>(1-\delta)n\right)\times&\\\times\frac{\mathsf{P}\left(T>\delta n\right)}{\mathsf{P}(T>n)}.&\end{aligned}\tag{16.11}$$

Известно (см. лекцию 15), что при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}(T>n)\sim\frac{c_1}{\sqrt{n}},\tag{16.12}$$

где c_1 – положительная постоянная. По лемме 16.1, соотношению (16.12) и принципу инвариантности Иглхарта предел правой части (16.11) равен

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\delta}}\int_0^{+\infty}\mathsf{P}\left(W^+(1)\in\frac{dy}{\sqrt{\delta}}\right)\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2(1-\delta)}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{2(1-\delta)}}\right)$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$ и $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\sqrt{n}\,\mathsf{P}\big(S_n \in \big(\sigma\sqrt{n}\,x, \sigma\sqrt{n}\,x + \Delta\big] \bigm| T > n\big) =$$
$$= \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\left(W^+(1) \leqslant \frac{dy}{\sqrt{\delta}}\right) \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{2(1-\delta)}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2(1-\delta)}}\right) \tag{16.13}$$

равномерно по $x \in (a, +\infty)$ и $\Delta \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Левая часть (16.13) не зависит от δ, поэтому можно перейти к пределу правой части при $\delta \to 0$. Заметим, что правая часть (16.13) равна

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\left(W^+(1) \leqslant dy\right) \left(e^{-\frac{(x-y\sqrt{\delta})^2}{2(1-\delta)}} - e^{-\frac{(x+y\sqrt{\delta})^2}{2(1-\delta)}}\right) \overset{\delta\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\overset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \frac{2\Delta}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} y\mathsf{P}\left(W^+(1) \in dy\right). \tag{16.14}$$

Вспоминая вид плотности вероятностей случайной величины $W^+(1)$ (см. замечание 16.1), находим, что

$$\int_0^{+\infty} y\mathsf{P}\left(W^+(1) \in dy\right) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Итак, правая часть соотношения (16.14) и, следовательно, предел правой части (16.13) при $\delta \to 0$ равны $\Delta \cdot x \exp\left(-x^2/2\right)$. Теорема доказана.

Пусть $T(x)$ – момент первого достижения случайным блужданием $\{S_n\}$ полуоси $(x, +\infty)$ при $x \in (0, +\infty)$. В качестве следствия теоремы 16.1 представляем следующий результат.

Теорема 16.2. *В условиях теоремы 16.1 для произвольных положительных x, y при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\left(T\left(\sigma\sqrt{n}x\right) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}x \leqslant y\right) = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} G_2(y) + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{16.15}$$

где $G_2(y)$ – некоторая собственная функция распределения. Соотношение (16.15) выполняется равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа.

Лемма 16.2. *В условиях теоремы 16.1 при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\left(\tau = n, z < S_n \leqslant z + y\right) = O\left(\frac{y}{n^{3/2}}\right) \tag{16.16}$$

равномерно по $z \in [0, +\infty)$ и $y \in (0, a)$, где a – произвольное положительное число;

$$\mathsf{P}\left(\tau = n, S_n > y\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n} y^2}\right) \tag{16.17}$$

равномерно по $y \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим тождество Спарре–Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right].$$

Продифференцируем его по s: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right) \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right)\right].$$

Приравняем коэффициенты при s^{n-1}:

$$n\mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; \tau = n\right) = \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_k}; S_k > 0\right) \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_{n-k}}; \tau = n - k\right).$$

Перейдем к распределениям: при $z \in [0, +\infty)$ и $y > 0$

$$n\mathsf{P}\left(S_n \in (z, z + y], \tau = n\right) = \mathsf{P}\left(S_n \in (z, z + y]\right) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^z \mathsf{P}\left(S_{n-k} \in (z - u, z + y - u], \tau = n - k\right) \mathsf{P}\left(S_k \in du\right) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} \int_z^{z+y} \mathsf{P}\left(S_{n-k} \in (0, z + y - u], \tau = n - k\right) \mathsf{P}\left(S_k \in du\right). \tag{16.18}$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(S_n \in (z, z+y]\,, \tau = n\right) \leqslant \frac{\mathsf{P}\left(S_n \in (z, z+y]\right)}{n}.$$

По теореме Стоуна при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(S_n \in (z, z+y]\right) = O\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по $z \in [0, +\infty)$ и $y \in (0, a)$, где a – произвольное положительное число. Из двух последних соотношений следует (16.16).

Далее, при $y > 0$

$$\mathsf{P}\left(\tau = n, S_n > y\right) = \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(\tau > n-1, S_{n-1} \in dz\right) \mathsf{P}\left(X_n > y - z\right). \tag{16.19}$$

Откуда по неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}\left(\tau = n, S_n > y\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{y^2} \mathsf{P}\left(\tau > n-1\right).$$

Для получения (16.17) осталось воспользоваться теоремой 15.2. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 16.2. Если $T\left(\sigma\sqrt{n}\,x\right) = n$, то $\max_{i \leqslant n-1} S_i = \sigma\sqrt{n}\,x - z$, где $z \geqslant 0$. Пусть $(n-k)$ – момент первого достижения этого максимума последовательностью $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, тогда, переходя от случайного блуждания $S_0, S_1, \ldots, S_{n-k}$ к двойственному блужданию, получаем при $x, y \in (0, +\infty)$, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(T\left(\sigma\sqrt{n}\,x\right) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}\,x \leqslant y\right) = \\
&\quad = \mathsf{P}\left(\tau = n, \sigma\sqrt{n}\,x < S_n \leqslant \sigma\sqrt{n}\,x + y\right) + \\
&\qquad + \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{P}\left(S_{n-k} \in \sigma\sqrt{n}\,x - dz, T > n-k\right) \times \\
&\qquad\qquad \times \mathsf{P}\left(\tau = k, S_k \in (z, z+y]\right).
\end{aligned}$$

Умножим обе части последнего соотношения на n и для произвольного $\Delta > 0$ запишем оценку сверху:

$$n\mathsf{P}\left(T\left(\sigma\sqrt{n}\,x\right) = n, S_n - \sigma\sqrt{n}\,x \leqslant y\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\mathsf{P}\bigl(\tau = n, \sigma\sqrt{n}\,x < S_n \leqslant \sigma\sqrt{n}\,x + y\bigr) +$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} n\mathsf{P}\bigl(S_{n-k} \in (\sigma\sqrt{n}\,x - (m+1)\Delta, \sigma\sqrt{n}\,x - m\Delta], T > n-k\bigr) \times$$
$$\times \mathsf{P}\left(\tau = k, m\Delta < S_k \leqslant (m+1)\Delta + y\right).$$

Первое слагаемое в правой части в силу (16.16) есть $o(1)$ при $n \to \infty$. Для произвольных $L \in \mathbb{N}$, $x_0 \in (0, x)$, $\varepsilon \in (0,1)$ разобьем сумму в правой части на составляющие:

$$\Sigma_1\left(n, \Delta, L, x_0\right) = \sum_{k=1}^{L}\sum_{m=0}^{M}, \Sigma_2\left(n, \Delta, L, x_0\right) = \sum_{k=1}^{L}\sum_{m=M+1}^{+\infty},$$
$$\Sigma_3\left(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon\right) = \sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)}\sum_{m=0}^{M}, \Sigma_4\left(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon\right) = \sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)}\sum_{m=M+1}^{+\infty},$$
$$\Sigma_5\left(n, \Delta, L, x_0, \varepsilon\right) = \sum_{k=n(1-\varepsilon)+1}^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty},$$

где $M = M\left(n, \Delta, x_0\right) := \sigma\sqrt{n}\,\left(x - x_0\right)/\Delta$.

По условной локальной предельной теореме (в решетчатом случае Δ выбираем кратным максимальному шагу распределения X_1) при $n \to \infty$

$$\Sigma_1\left(n, \Delta, L, x_0\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{L}\sum_{m=0}^{M}\left[\frac{c_1\Delta}{\sigma}\left(x\sqrt{\frac{n}{n-k}} - \frac{m\Delta}{\sigma\sqrt{n-k}}\right) \times\right.$$
$$\left. \times\, e^{-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{n}{n-k}} - \frac{m\Delta}{\sigma\sqrt{n-k}}\right)^2} + o(1)\right] \times$$
$$\times \mathsf{P}\left(\tau = k, m\Delta < S_k \leqslant (m+1)\Delta + y\right)$$

равномерно по всем возможным парам (k, m). Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \Sigma_1\left(n, \Delta, L, x_0\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1}{\sigma} x e^{-\frac{x_0^2}{2}} \sum_{k=1}^{L}\sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau = k, m\Delta < S_k \leqslant (m+1)\Delta + y\right)\Delta.$$

Заметим, что последняя двойная сумма равна

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\tau \leqslant L, m\Delta < S_\tau \leqslant (m+1)\Delta + y\right)\Delta \overset{L\to\infty}{\to}$$

$$\overset{L\to\infty}{\to} \sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(m\Delta < S_\tau \leqslant (m+1)\Delta + y\right)\Delta =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_\tau > m\Delta\right)\Delta - \sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_\tau > y + (m+1)\Delta\right)\Delta \overset{\Delta\to 0}{\to}$$

$$\overset{\Delta\to 0}{\to} \mathsf{E}S_\tau - \mathsf{E}\left(S_\tau - y; S_\tau > y\right).$$

Итак,

$$\limsup_{x_0\to x}\limsup_{\Delta\to 0}\limsup_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \Sigma_1\left(n, \Delta, L, x_0\right) \leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} G_2(y), \tag{16.20}$$

где

$$G_2(y) = \frac{\sqrt{2\pi}c_1}{\sigma}\left[\mathsf{E}S_\tau - \mathsf{E}\left(S_\tau - y; S_\tau > y\right)\right]. \tag{16.21}$$

Очевидно, что (см. замечание 14.1)

$$\lim_{y\to+\infty} G_2(y) = \frac{\sqrt{2\pi}c_1}{\sigma}\mathsf{E}S_\tau = 1,$$

т.е. функция распределения $G_2(y)$ является собственной.

Покажем теперь, что все остальные составляющие $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_5$ малы. Очевидно,

$$\Sigma_2\left(n, \Delta, L, x_0\right) \leqslant n \sum_{k=1}^{L} \mathsf{P}\left(S_{n-k} \leqslant \sigma\sqrt{n}\, x_0, T > n-k\right) \times$$
$$\times \mathsf{P}\left(\tau = k, S_k > \sigma\sqrt{n}\left(x - x_0\right)\right).$$

Применяя соотношение (16.12) к первой вероятности справа, а соотношение (16.17) – ко второй, получаем, что при $n \to \infty$ правая часть есть

$$O\left(n \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{n-k}} \frac{1}{\sqrt{k}n(x-x_0)^2}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{n-L}}\right) = o(1).$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \Sigma_2\,(n,\Delta,L,x_0) = 0. \tag{16.22}$$

Рассмотрим $\Sigma_3\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon)$. Ввиду теоремы 16.1 и ограниченности функции $x\exp\left(-x^2/2\right)$, $x\in[0,+\infty)$, при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\big(S_{n-k}\in(\sigma\sqrt{n}\,x-(m+1)\Delta,\sigma\sqrt{n}\,x-m\Delta],\ T>n-k\big) = O\left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

равномерно по всем слагаемым, представленным в $\Sigma_3(n,\Delta,$ $L,x_0,\varepsilon)$, поэтому при $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\Sigma_3(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon) &= O\left(n\frac{1}{n}\sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)}\sum_{m=0}^{+\infty}\mathsf{P}(\tau=k;S_k>m\Delta)\Delta\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)}\mathsf{E}\,(S_\tau;\tau=k)\right) = \\ &= O\big(\mathsf{E}(S_\tau;\tau>L)\big).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathsf{E}S_\tau$ конечно, то

$$\limsup_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \Sigma_3\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon) = 0. \tag{16.23}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Sigma_4\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon) \leqslant n\sum_{k=L+1}^{n(1-\varepsilon)}&\mathsf{P}\left(S_{n-k}\leqslant\sigma\sqrt{n}\,x_0,T>n-k\right)\times\\ &\times\mathsf{P}\left(\tau=k,S_k>\sigma\sqrt{n}\,(x-x_0)\right).\end{aligned}$$

Применяя соотношение (16.12) к первой вероятности справа, получаем, что при $n\to\infty$

$$\Sigma_4\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon) = O\left(\frac{n}{\sqrt{n\varepsilon}}\mathsf{P}\left(\tau>L,S_\tau>\sigma\sqrt{n}\,(x-x_0)\right)\right).$$

По неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}\left(\tau>L,S_\tau>\sigma\sqrt{n}\,(x-x_0)\right)\leqslant\frac{\mathsf{E}\,(S_\tau;\tau>L)}{\sigma\sqrt{n}\,(x-x_0)}\overset{L\to\infty}{\to}0$$

(здесь учтено, что математическое ожидание $\mathsf{E}S_\tau$ конечно). Поэтому

$$\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\Sigma_4\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon)=0. \tag{16.24}$$

Наконец, рассмотрим $\Sigma_5\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon)$. Поскольку (см. соотношение (16.16)) при $k\to\infty$

$$\mathsf{P}\,(\tau=k, m\Delta<S_k\leqslant(m+1)\Delta+y)=O\left(\frac{y+\Delta}{k^{3/2}}\right)$$

и

$$\sum_{m=0}^{\infty}\mathsf{P}\bigl(S_{n-k}\in\bigl(\sigma\sqrt{n}\,x-(m+1)\Delta,\sigma\sqrt{n}\,x-m\Delta\bigr]\,,\ T>n-k\bigr)\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}(T>n-k),$$

то при $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\Sigma_5\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon)&=O\biggl(n\sum_{k=n(1-\varepsilon)}^{n-1}\mathsf{P}(T>n-k)\frac{y+\Delta}{k^{3/2}}\biggr)=\\&=O\biggl(n\sum_{k=n(1-\varepsilon)}^{n-1}\frac{1}{k^{3/2}\sqrt{n-k}}\biggr)=\\&=O\biggl(\frac{n}{n^{3/2}(1-\varepsilon)^{3/2}}\sum_{k=n(1-\varepsilon)}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\biggr)=\\&=O\biggl(\frac{\sqrt{n\varepsilon}}{\sqrt{n}\,(1-\varepsilon)^{3/2}}\biggr)=O\biggl(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^{3/2}}\biggr).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\Sigma_5\,(n,\Delta,L,x_0,\varepsilon)=0. \tag{16.25}$$

Из соотношений (16.20), (16.22)–(16.25) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}n\mathsf{P}\left(T\left(\sigma\sqrt{n}\,x\right)=n,S_n-\sigma\sqrt{n}\,x\leqslant y\right)\leqslant\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}G_2(y).$$

Аналогично показывается, что

$$\liminf_{n\to\infty}n\mathsf{P}\left(T\left(\sigma\sqrt{n}\,x\right)=n,S_n-\sigma\sqrt{n}\,x\leqslant y\right)\geqslant\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}G_2(y).$$

Соотношение (16.15) установлено. Требуемая равномерность получается некоторым уточнением приведенных рассуждений. Теорема доказана.

Замечание 16.2. Теорема 16.2 справедлива и при $y = +\infty$. Это установлено Эппелем в работе [12]. Наше доказательство также проходит при $y = +\infty$, если вместо (16.16) воспользоваться оценкой $\mathsf{P}\,(\tau = n) = O\left(1/n^{3/2}\right)$, $n \to \infty$, которая является очевидным следствием соотношения (16.19) и следующей оценки (см. [12, лемма 2]): при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\big(\tau > n, S_n \in (x-1, x]\big) = O\big(|x-1|/n^{3/2}\big) \tag{16.26}$$

равномерно по $x \in (-\infty, 0]$.

Теорема 16.3. *В условиях теоремы 16.1 для произвольного $y > 0$ при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\,(\tau = n, S_n \leqslant y) \sim \frac{c_2}{2} G_2(y) n^{-\frac{3}{2}},$$

где c_2 – положительная постоянная (та же, что и в замечании 14.1), $G_2(y)$ – собственная функция распределения (такая же, как и в теореме 16.2).

Прежде чем доказывать эту теорему, сформулируем утверждение, касающееся свертки двух числовых последовательностей (доказательство предоставляется читателю).

Лемма 16.3. *Пусть числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $a_n = O\left(n^{-1}\right)$ при $n \to \infty$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, b_n := b$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = bA,$$

где $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Доказательство теоремы 16.3. Рассмотрим равенство (16.18) при $z = 0$. Применив к нему лемму 16.3 с учетом теоремы Стоуна и соотношения (16.16), получаем, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\,(\tau = n, S_n \leqslant y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(y - \int_0^y \mathsf{P}\,(S_\tau \leqslant y - u)\, du \right) n^{-3/2}.$$

Но выражение в скобках равно $\mathsf{E}S_\tau - \mathsf{E}\,(S_\tau - y; S_\tau > y)$. Поэтому, ввиду (16.21), при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\,(\tau = n, S_n \leqslant y) \sim \frac{G_2(y)}{2\pi c_1} n^{-3/2}.$$

Осталось применить замечание 14.1. Теорема доказана.

Замечание 16.3. Теорема 16.3 справедлива и при $y = +\infty$ (см. [12]).

В заключение лекции переформулируем теорему 16.2 для момента первого достижения случайным блужданием $\{S_n\}$ полуоси $(-\infty, x]$ при $x \in (-\infty, 0)$. Обозначим его $T(x)$. В условиях теоремы 16.1 для произвольных $x \in (0, +\infty)$, $y \in (0, +\infty]$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\big(T\left(-\sigma\sqrt{n}x\right) = n, S_n + \sigma\sqrt{n}x \geqslant -y\big) = \\ = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} G_1(y) + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (16.27)$$

где $G_1(y)$ – собственная функция распределения, более точно

$$G_1(y) = \frac{\sqrt{2\pi}c_2}{\sigma}\big[-\mathsf{E}S_T + \mathsf{E}(S_T + y; S_T \leqslant -y)\big]. \qquad (16.28)$$

Указанное соотношение выполняется равномерно по $x \in (a, +\infty)$, $y \in (0, b)$, где a, b – произвольные положительные числа. Кроме того, в условиях теоремы 16.1 для произвольного $y \in (0, +\infty]$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\,(T = n, S_n \geqslant -y) \sim \frac{c_1}{2} G_1(y) n^{-3/2}, \qquad (16.29)$$

где c_1 – положительная постоянная (та же, что и в соотношении (16.12)).

Лекция 17
Локальная версия принципа инвариантности Иглхарта и ее применение для случайных блужданий с отрицательным сносом

В принципе инвариантности Иглхарта случайное блуждание рассматривается при условии $\{T > n\}$. Что будет, если это условие заменить на условие $\{T = n\}$, локализующее момент попадания блуждания на полуось $(-\infty, 0]$?

Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 17.1. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *и распределение* X_1 *является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым, тогда для произвольного* $y \in [0, +\infty]$ *при* $n \to \infty$

$$\left\{Y_n(t), t \in [0,1] \;\middle|\; T = n, S_n \geqslant -y\right\} \xrightarrow{D} W_0^+,$$

где W_0^+ *– броуновская экскурсия.*

Доказательство. Сначала установим сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$. Покажем, что для фиксированных положительных $a_1, a_2, \ldots, a_m$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(Y_n(t_i) \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m; T = n, S_n \geqslant -y\right) \sim \\ \sim \frac{c_1 G_1(y)}{2} \mathsf{P}\left(W_0^+(t_i) \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m\right) n^{-3/2}, \qquad (17.1)$$

где c_1 – положительная постоянная, о которой идет речь в замечании 15.1; G_1 – собственная функция распределения, заданная формулой (16.28). Напомним, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(T > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}. \qquad (17.2)$$

Запишем представление:

$$n^{-3/2} \mathsf{P}\left(Y_n(t_i) \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m; T = n, S_n \geqslant -y\right) =$$

$$
\begin{aligned}
= \int_0^{a_m} \mathsf{P}\Big(Y_n(t_i) \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m-1;& \\
\frac{S_{\lfloor nt_m \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \in dx_m \,\Big|\, T > \lfloor nt_m \rfloor \Big)& \times \\
\times (n - \lfloor nt_m \rfloor) \times& \\
\times \mathsf{P}\big(T\left(-\sigma\sqrt{n}\, x_m\right) = n - \lfloor nt_m \rfloor\,,& \\
S_{n - \lfloor nt_m \rfloor} + \sigma\sqrt{n}\, x_m \geqslant -y \big)& \times \\
\times \frac{n^{-3/2} \mathsf{P}\left(T > \lfloor nt_m \rfloor\right)}{n - \lfloor nt_m \rfloor}&.
\end{aligned}
$$

Откуда в силу принципа инвариантности Иглхарта и соотношений (16.27) и (17.2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{-3/2} \mathsf{P}\left(Y_n\left(t_i\right) \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, m; T = n, S_n \geqslant -y\right) =& \\
= c_1 G_1(y) \int_0^{a_m} \mathsf{P}\bigg(\sqrt{t_m} W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) \leqslant a_i,& \\
i = 1, \ldots, m-1; \sqrt{t_m} W^+(1) \in dx_m \bigg)& \times \\
\times \frac{1}{\sqrt{2\pi t_m \left(1 - t_m\right)^3}} x_m e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}}&.
\end{aligned}
$$

Учитывая, что броуновская извилина является марковским процессом и вспоминая вид ее переходной плотности p^+ (см. лекцию 11), находим, что последний интеграл равен

$$
\begin{aligned}
\int_0^{a_1/\sqrt{t_m}} \ldots \int_0^{a_{m-1}/\sqrt{t_m}} \int_0^{a_m} p^+\left(0, 0; \frac{t_1}{t_m}, x_1\right) \times& \\
\times p^+\left(\frac{t_1}{t_m}, x_1; \frac{t_2}{t_m}, x_2\right) \ldots p^+\left(\frac{t_{m-1}}{t_m}, x_{m-1}; 1, \frac{x_m}{\sqrt{t_m}}\right) \times& \\
\times \frac{1}{\sqrt{2\pi t_m \left(1 - t_m\right)^3}} x_m e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}}\, dx_1 \ldots dx_m =& \\
= \frac{1}{2} \int_0^{a_1/\sqrt{t_m}} \ldots \int_0^{a_{m-1}/\sqrt{t_m}} \int_0^{a_m} \frac{2x_1}{\left(t_1/t_m\right)^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2(t_1/t_m)}} \times&
\end{aligned}
$$

$$\times g\left(\frac{t_2-t_1}{t_m},x_1,x_2\right)\dots g\left(\frac{t_m-t_{m-1}}{t_m},x_{m-1},\frac{x_m}{\sqrt{t_m}}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi t_m\left(1-t_m\right)^3}}x_m e^{-\frac{x_m^2}{2(1-t_m)}}\,dx_1\dots dx_m.$$

После замены $\sqrt{t_m}x_1$ на x_1, $\dots$, $\sqrt{t_m}x_{m-1}$ на x_{m-1} перепишем последнее выражение, учитывая, что при любом $a>0$ $\sqrt{a}g\left(at,\sqrt{a}x,\sqrt{a}y\right)=g(t,x,y)$:

$$\frac{1}{2}\int_0^{a_1}\dots\int_0^{a_m}\frac{2x_1}{\sqrt{2\pi t_1^3}}e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}g\left(t_2-t_1,x_1,x_2\right)\times\dots\times$$
$$\times g\left(t_m-t_{m-1},x_{m-1},x_m\right)f\left(t_m,x_m\right)\,dx_1\dots dx_m,$$

где
$$f(t,x)=\frac{x}{\left(1-t\right)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}.$$

Подынтегральное выражение можно переписать в виде:

$$\frac{2x_1}{\sqrt{2\pi t_1^3}}\,e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}f\left(t_1,x_1\right)g\left(t_2-t_1,x_1,x_2\right)\frac{f\left(t_2,x_2\right)}{f\left(t_1,x_1\right)}\times\dots\times$$
$$\times g\left(t_m-t_{m-1},x_{m-1},x_m\right)\frac{f\left(t_m,x_m\right)}{f\left(t_{m-1},x_{m-1}\right)}=$$
$$=p_0^+\left(0,0;t_1,x_1\right)\dots p_0^+\left(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m\right),$$

где p_0^+ – переходная плотность броуновской экскурсии (см. лекцию 11). Итак, соотношение (17.1) доказано.

Учитывая теперь, что (см. соотношение (16.29)) при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\left(T=n,S_n\geqslant -y\right)\sim\frac{c_1}{2}G_1(y)n^{-3/2},\tag{17.3}$$

получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(Y_n(t_i)\leqslant a_i,\ i=1,\dots,m\,|\,T=n,S_n\geqslant -y\right)=$$
$$=\mathsf{P}\left(W^+(t_i)\leqslant a_i,\ i=1,\dots,m\right).\tag{17.4}$$

Установим, что для любых $\varepsilon>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(w_{Y_n}(\delta)\geqslant\varepsilon\,|\,T=n,S_n\geqslant -y\right)=0,\tag{17.5}$$

Очевидно, что

$$w_{Y_n}(\delta;0,1) \leqslant w_{Y_n}\left(\delta;0,\frac{1}{2}\right) + w_{Y_n}\left(\delta;\frac{1}{2},1\right). \tag{17.6}$$

Сначала покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta;0,\frac{1}{2}\right) \geqslant \varepsilon \,\middle|\, T = n, S_n \geqslant -y\right) = 0. \tag{17.7}$$

Достаточно, ввиду (17.4), показать, что при любом $a > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta;0,\frac{1}{2}\right) \geqslant \varepsilon, \frac{S_{\lfloor n/2\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} > a \,\middle|\, T = n, S_n \geqslant -y\right) = 0.$$

Но последняя вероятность равна (используем принцип инвариантности Иглхарта и соотношения (16.27), (17.2) и (17.3))

$$\begin{aligned}
&\int_a^{+\infty} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta;0,\frac{1}{2}\right) \geqslant \varepsilon, \frac{S_{\lfloor n/2\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \in dx \,\middle|\, T > \lfloor n/2\rfloor\right) \times \\
&\qquad \times \frac{\mathsf{P}\left(T > \lfloor n/2\rfloor\right)}{\mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right)} \times \\
&\qquad \times \mathsf{P}\big(T(-\sigma\sqrt{n}\,x) = n - \lfloor n/2\rfloor, S_{n-\lfloor n/2\rfloor} + \sigma\sqrt{n}\,x \geqslant -y\big) \overset{n\to\infty}{\to} \\
&\quad \overset{n\to\infty}{\to} \int_a^{+\infty} \mathsf{P}\big(w_{W^+}(2\delta;0,1) \geqslant \varepsilon\sqrt{2}, W^+(1)/\sqrt{2} \in dx\big) \times \\
&\qquad \times 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2} \leqslant \\
&\quad \leqslant K \mathsf{P}\big(w_{W^+}(2\delta;0,1) \geqslant \varepsilon\sqrt{2}\big) \overset{\delta\to 0}{\to} 0,
\end{aligned}$$

где K – положительная постоянная. Итак, соотношение (17.7) доказано.

Теперь покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta;\frac{1}{2},1\right) \geqslant \varepsilon \,\middle|\, T = n, S_n \geqslant -y\right) = 0. \tag{17.8}$$

Осуществим переход к двойственному случайному блужданию $\{\widetilde{S}_i\}$: при достаточно больших четных n

$$\mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta;\frac{1}{2},1\right) \geqslant \varepsilon \,\middle|\, T = n, S_n \geqslant -y\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right)} \times$$
$$\times \int_{-y}^{0} \mathsf{P}\left(w_{Y_n}\left(\delta; \frac{1}{2}, 1\right) \geqslant \varepsilon, T = n, S_n \in dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right)} \times$$
$$\times \int_{-y}^{0} \mathsf{P}\left(w_{\widetilde{Y}_n}\left(2\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon, \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \widetilde{S}_i < x, \widetilde{S}_n \in dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right)} \times$$
$$\times \int_{-y}^{0} \mathsf{P}\big(w_{\widetilde{Y}_n}\left(2\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon, \widetilde{\tau} > n, \widetilde{S}_n \in dx\big) =$$
$$= \frac{1}{\mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right)} \times$$
$$\times \mathsf{P}\big(w_{\widetilde{Y}_n}\left(2\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon, \widetilde{\tau} > n, \widetilde{S}_n \geqslant -y\big) \qquad (17.9)$$

(здесь $\widetilde{Y}_n$, $\widetilde{\tau}$ означают то же для $\{\widetilde{S}_i\}$, что Y_n и τ для $\{S_i\}$).

Лемма 17.1. *В условиях теоремы 17.1 для любого случайного события A_n из $\sigma\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ и произвольного числа $y > 0$ существуют такие положительные постоянные K, L, M (не зависящие от n), что для всех n*

$$\mathsf{P}\left(A_n, \tau > n, S_n \geqslant -y\right) \leqslant K \cdot \mathsf{P}\left(A_n, n < \tau \leqslant n + L, S_\tau \leqslant M\right).$$

Доказательство. Существуют такие положительные числа x_0, M $(x_0 < M)$, что $\mathsf{P}\left(x_0 < X_1 \leqslant M\right) > 0$. Возьмем $L = \lceil y/x_0 \rceil$, $K = \mathsf{P}\left(x_0 < X_1 \leqslant M\right)^{-L}$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(A_n, \tau > n, S_n \geqslant -y\right) \mathsf{P}\left(x_0 < X_{n+1} \leqslant M, \ldots, x_0 < X_{n+L} \leqslant M\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(A_n, \tau > n, S_n \geqslant -y, x_0 < X_{n+1} \leqslant M, \ldots, x_0 < X_{n+L} \leqslant M\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left(A_n, n < \tau \leqslant n + L, S_\tau \leqslant M\right).$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы 17.1 правая часть (17.9) не превосходит

$$K \sum_{i=1}^{L} \frac{\mathsf{P}(\widetilde{\tau} = n + i, S_{n+i} \leqslant M)}{\mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right)} \times$$
$$\times \mathsf{P}\big(w_{\widetilde{Y}_n}\left(2\delta; 0, 1/2\right) \geqslant \varepsilon \bigm| \widetilde{\tau} = n + i, \widetilde{S}_{n+i} \leqslant M\big).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ с учетом (17.3), (17.7) и теоремы 16.3, получаем (17.8). Из (17.6)–(17.8) следует (17.5). Из (17.4) и (17.5) следует утверждение теоремы.

Полученная локальная версия принципа инвариантности Иглхарта позволяет установить условные принципы инвариантности для случайного блуждания с отрицательным сносом. Итак, предположим, что

$$-\infty \leqslant \mathsf{E}X_1 < 0.$$

Кроме того, предположим, что выполнено *одностороннее условие Крамера*:

(A) $\exists a \in (0, +\infty) : \mathsf{E}\exp(aX_1) < +\infty$.

Рассмотрим функцию

$$\theta(t) = \mathsf{E}\exp(tX_1).$$

Ее область определения содержит $[0, a]$. Предположим, что выполнено еще одно условие: функция $\theta(t)$ достигает своего минимума во внутренней точке τ области определения, т.е.

(B) $\theta'(\tau) = 0$ при $\tau \in (0, a)$.

Наконец, предположим, что

(C) распределение X_1 является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым.

Заметим, что у функции $\theta(t)$, $t \in (0, a)$, существуют производные любого порядка и

$$\theta'(t) = \mathsf{E}\left[X_1 \exp(tX_1)\right], \qquad \theta''(t) = \left[\mathsf{E}X_1^2 \exp(tX_1)\right].$$

Далее,

$$\lim_{t \to 0} \theta'(t) = \mathsf{E}X_1 < 0, \qquad \theta''(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, a),$$

поэтому функция $\theta'(t)$ возрастает на $(0, a)$ и, если пересекает ось абсцисс, то только в одной точке τ, в которой функция $\theta(\cdot)$ достигает минимума. Положим $\theta(\tau) = \gamma$. Поскольку $\lim_{t \downarrow 0} \theta(t) = 1$, то $\gamma < 1$.

Зафиксируем $t \in (0, a]$. Пусть $X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения

$$F^{(t)}(x) = \frac{1}{\theta(t)} \int_0^x e^{tu}\, dF(u),$$

где $F(u)$ – функция распределения случайной величины X_1. Введем случайное блуждание

$$S_0^{(t)} = 0, \qquad S_n^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(t)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

называемое *сопряженным* к блужданию $\{S_n\}$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольная измеримая числовая функция от n числовых переменных. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} f(S_1, \ldots, S_n) &= \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) = \\
&= \theta^n(t) \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \times \\
&\quad \times \frac{e^{tx_1}}{\theta(t)}\, dF(x_1) \ldots \frac{e^{tx_n}}{\theta(t)}\, dF(x_n)\; e^{-t\sum_{i=1}^{n} x_i} = \\
&= \theta^n(t) \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \times \\
&\quad \times dF^{(t)}(x_1) \ldots dF^{(t)}(x_n)\, e^{-t\sum_{i=1}^{n} x_i} = \\
&= \theta^n(t) \mathsf{E}\Big[f\big(S_1^{(t)}, \ldots, S_n^{(t)}\big) e^{-tS_n^{(t)}}\Big],
\end{aligned}$$

причем, если существует одно математическое ожидание, то существует и другое.

Очевидно, что $\left\{S_n^{(\tau)}\right\}$ является случайным блужданием с нулевым сносом, т.к.

$$\mathsf{E} X_1^{(\tau)} = \frac{1}{\gamma} \mathsf{E}\left(X_1 e^{\tau X_1}\right) = \frac{1}{\gamma}\theta'(\tau) = 0.$$

Найдем шаговую дисперсию этого блуждания:

$$\mathsf{E}\big(X_1^{(\tau)}\big)^2 = \frac{1}{\gamma}\mathsf{E}\big(X_1^2 e^{\tau X_1}\big) = \frac{\theta''(\tau)}{\gamma} \in (0, +\infty).$$

Таким образом, случайное блуждание $\left\{S_n^{(\tau)}\right\}$ удовлетворяет обычным условиям, которые ранее рассматривались (следует сказать, что случайная величина $X_1^{(\tau)}$ имеет конечные моменты любого порядка).

Теорема 17.2. *Пусть* $-\infty \leqslant \mathsf{E}X_1 < 0$ *и выполнены условия* (A), (B), (C). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(T > n) \sim c_3 \gamma^n n^{-3/2}, \tag{17.10}$$

$$\mathsf{P}\left(T = n\right) \sim c_4 \gamma^n n^{-3/2}, \tag{17.11}$$

где c_3, c_4 *– положительные постоянные, причем* $c_4 = c_3(1-\gamma)/\gamma$. *Далее, случайные последовательности* $\{S_n \mid T > n\}$ *и* $\{S_n \mid T = n\}$ *сходятся по распределению при* $n \to \infty$, *и для произвольного* $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(T > n, S_n \leqslant y\right) \gamma^{-n} n^{3/2} = c_3 G_3(y), \tag{17.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(T = n, S_n \geqslant -y\right) \gamma^{-n} n^{3/2} = c_4 G_4(y), \tag{17.13}$$

где $G_3(y)$, $G_4(y)$ *– некоторые собственные функции распределения.*

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы, причем доказательство первой из них предоставляется читателю.

Лемма 17.2. *Пусть две числовые последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *связаны следующим соотношением:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n\right),$$

когда s *принадлежит некоторой окрестности точки* 0. *Если* $\lim_{n\to\infty} b_n n^{3/2} = b$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^{3/2} = bA,$$

где $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Лемма 17.3. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *и распределение* X_1 *является либо центрально решетчатым, либо нерешетчатым. Тогда для произвольного* $\lambda \in (0, +\infty)$ *при* $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_i}; T > i\right) n^{-3/2}.$$

Доказательство. В силу теоремы Стоуна при $n \to \infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \mathsf{P}\left(S_n \in dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 n}} dx + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma\lambda} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{17.14}$$

Запишем тождество Спарре–Андерсена: при $\lambda > 0$, $|s| < 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right)\right].$$

Ввиду (17.14) при $n \to \infty$

$$b_n := \frac{1}{n} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; S_n > 0\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\lambda} n^{-3/2},$$

поэтому по лемме 17.2 при $n \to \infty$

$$a_n := \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n}; T > n\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_i}; T > i\right) n^{-3/2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 17.2. Заметим, что в силу леммы 17.3 для произвольного $\lambda \in (-\tau, +\infty)$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\big(e^{-\lambda S_n}; T > n\big) = \gamma^n \mathsf{E}\big(e^{-(\lambda+\tau) S_n^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > n\big) \sim \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(\tau)}\left(\lambda+\tau\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(e^{-(\lambda+\tau) S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i\big) \gamma^n n^{-3/2}, \tag{17.15}$$

где $\sigma^{(\tau)}$, $T^{(\tau)}$ означают то же самое для $\left\{S_n^{(\tau)}\right\}$, что σ, T для $\{S_n\}$. Из (17.15) при $\lambda = 0$ получаем, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(T > n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(\tau)}\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(e^{-\tau S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i\big) \gamma^n n^{-3/2},$$

т.е. соотношение (17.10) доказано. Из (17.10) следует (17.11): при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(T = n\right) = \mathsf{P}\left(T > n-1\right) - \mathsf{P}\left(T > n\right) \sim c_3 \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \gamma^n n^{-3/2}.$$

Из (17.10) и (17.15) получаем, что при $\lambda \in (-\tau, +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda S_n} \,|\, T > n\right) = \frac{\tau}{\lambda+\tau} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(e^{-(\lambda+\tau)S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i\big)}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(e^{-\tau S_i^{(\tau)}}; T^{(\tau)} > i\big)}.$$

Ряд в числителе мажорируется по $\lambda \in (0, +\infty)$ сходящимся числовым рядом, поэтому существует предел правой части при $\lambda \downarrow 0$, равный 1. По теореме непрерывности для преобразования Лапласа все это означает, что случайная последовательность $\{S_n \,|\, T > n\}$ сходится по распределению при $n \to \infty$ к случайной величине с некоторой функцией распределения $G_3(y)$. Откуда, учитывая соотношение (17.10), получаем (17.12) для y, являющихся точками непрерывности функции G_3 (более тонкий анализ показывает, что соотношение (17.12) справедливо для всех $y \in \mathbb{R}$). Наконец, при $y \geqslant 0$

$$P\left(S_n \leqslant -y, T = n\right) = P\left(T > n-1, S_n \leqslant -y\right),$$

поэтому

$$\mathsf{P}\left(S_n \leqslant -y \,|\, T = n\right) = \\ = \frac{\mathsf{P}\left(T > n-1\right)}{\mathsf{P}\left(T = n\right)} \mathsf{P}\left(S_{n-1} \leqslant -X_n - y \,|\, T > n-1\right).$$

Применяя (17.10)–(17.12), получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(S_n \leqslant -y \,|\, T = n\right) = \frac{1}{1-\gamma} \mathsf{E} G_3\left(-X_1 - y\right),$$

причем предел правой части при $y \downarrow 0$ равен 1 (доказательство предоставляется читателю). Итак, установлены сходимость по распределению при $n \to \infty$ случайной последовательности $\{S_n \,|\, T = n\}$ и, следовательно, соотношение (17.13). Теорема доказана.

Положим

$$Z_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma^{(\tau)}\sqrt{n}}, \qquad t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 17.3. *В условиях теоремы 17.2 для произвольного $y \in [0, +\infty]$ при $n \to \infty$*

$$\big\{Z_n(t), t \in [0,1] \,\big|\, T = n, S_n \geqslant -y\big\} \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное борелевское множество A из $D[0,1]$ такое, что $\mathsf{P}\left(W_0^+ \in \partial A\right) = 0$. Предположим сначала, что $y \in (0, +\infty)$. Переходом к сопряженному случайному блужданию $\left\{S_n^{(\tau)}\right\}$ получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(Z_n \in A \,|\, T = n, S_n \geqslant -y\right) = \\
&\qquad = \int_{-y}^{0} \mathsf{P}\big(Z_n^{(\tau)} \in A, S_n^{(\tau)} \in dz \;\big|\; T^{(\tau)} = n, S_n^{(\tau)} \geqslant -y\big) \times \\
&\qquad\qquad \times \frac{\gamma^n e^{-\tau z} \mathsf{P}\big(T^{(\tau)} = n, S_n^{(\tau)} \geqslant -y\big)}{\mathsf{P}(T = n, S_n \geqslant -y)}, \qquad (17.16)
\end{aligned}$$

где $Z_n^{(\tau)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(\tau)} / \left(\sigma^{(\tau)}\sqrt{n}\right)$. Дробь в правой части (17.16), ввиду соотношения (17.3) и теоремы 17.2, стремится к

$$\left(c_1^{(\tau)} G_1^{(\tau)}(y) / (2 c_4 G_4(y))\right) \exp\left(-\tau z\right)$$

равномерно по $z \in [-y, 0]$, где $c_1^{(\tau)}$, $G_1^{(\tau)}(y)$ означают то же самое для $\left\{S_n^{(\tau)}\right\}$, что c_1, $G_1(y)$ для $\{S_n\}$. В силу локальной версии принципа инвариантности Иглхарта при $z \in [0, y]$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(Z_n^{(\tau)} \in A, S_n^{(\tau)} \geqslant -z \;\big|\; T^{(\tau)} = n, S_n^{(\tau)} \geqslant -y\big) = \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(W_0^+ \in A\right) \frac{G_1^{(\tau)}(z)}{G_1^{(\tau)}(y)}.
\end{aligned}$$

Поэтому предел правой части (17.16) при $n \to \infty$ равен

$$\mathsf{P}\left(W_0^+ \in A\right) \int_{-y}^{0} \frac{c_1^{(\tau)} \exp(-\tau z)\, dG_1^{(\tau)}(z)}{2 c_4 G_4(y)}.$$

При $A = D[0,1]$ получаем, что все это выражение равно 1 и, следовательно, последний интеграл равен 1. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Z_n \in A \,|\, T = n, S_n \geqslant -y\right) = \mathsf{P}\left(W_0^+ \in A\right).$$

Утверждение теоремы при $y = +\infty$ следует из доказанного и сходимости по распределению при $n \to \infty$ случайной последовательности$\{S_n \,|\, T = n\}$ (см. теорему 17.2). Теорема доказана.

Следующий результат представляет собою принцип инвариантности Иглхарта для случайного блуждания с отрицательным сносом, удовлетворяющего условию Крамера.

Теорема 17.4. *В условиях теоремы 17.2 при $n \to \infty$*

$$\left\{ Z_n(t), t \in [0,1] \,\middle|\, T > n \right\} \xrightarrow{D} W_0^+.$$

Доказательство. Для произвольного борелевского множества A из $D[0,1]$

$$\mathsf{P}\left(Z_n \in A \,|\, T > n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(Z_n \in A \,|\, T = n+k\right) \frac{\mathsf{P}\left(T = n+k\right)}{\mathsf{P}(T > n)}$$

причем ряд сходится равномерно по n, поскольку его k-й член не превосходит $P\left(T = n+k\right)/P(T > n)$, а это отношение, в свою очередь, при достаточно больших n и при всех $k \in \mathbb{N}$ не превосходит $c\gamma^k$, где c – некоторая положительная постоянная. По теореме 17.3, если $\mathsf{P}\left(W_0^+ \in \partial A\right) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Z_n \in A \,|\, T = n+k\right) = \mathsf{P}\left(W_0^+ \in A\right).$$

Следовательно, с учетом теоремы 17.2 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Z_n \in A \,|\, T > n\right) = \mathsf{P}\left(W_0^+ \in A\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_4}{c_3}\gamma^k = \mathsf{P}\left(W_0^+ \in A\right).$$

Теорема доказана.

Лекция 18
Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона

Пусть в момент времени 0 имеется одна частица. В момент 1 она порождает k частиц с вероятностью p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, а сама исчезает (предполагается, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$). Эти k частиц образуют первое поколение. Затем в момент времени 2 частицы первого поколения порождают независимо друг от друга и от предыстории каждая свое количество частиц в соответствии с тем же вероятностным распределением $\{p_k\}$, а сами исчезают. Получается второе поколение и т.д. Обозначим Z_n число частиц в n-ом поколении. Случайная последовательность $\{Z_n\}$ называется *ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона.*

Следует отметить почтенный возраст этой вероятностной модели и огромное количество публикаций, посвященных ей, в том числе замечательные монографии [6], [8], [10].

Введем производящую функцию числа непосредственных потомков одной частицы:

$$\varphi(s) = \mathsf{E} s^{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \qquad s \in [-1, 1]\,.$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ число потомков от 1-й, 2-й, $\ldots$ частиц первого поколения. Тогда

$$Z_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{Z_1},$$

причем $Z_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковой производящей функцией $\varphi(s)$. Поэтому производящая функция случайной величины Z_2 равна

$$\mathsf{E} s^{Z_2} = \mathsf{E} s^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{Z_1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(s^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}; Z_1 = k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(Z_1 = k\right) \mathsf{E} s^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \varphi^k(s) = \varphi\left(\varphi(s)\right).$$

Аналогично показывается, что

$$\varphi_n(s) := \mathsf{E} s^{Z_n} = \varphi\left(\mathsf{E} s^{Z_{n-1}}\right) = \varphi\left(\varphi_{n-1}(s)\right) = \varphi\left(\varphi\left(\varphi_{n-2}(s)\right)\right) = \cdots.$$

Среднее число непосредственных потомков одной частицы равно

$$m := \mathsf{E} Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \varphi'(1).$$

Точно так же

$$\mathsf{E} Z_n = \varphi_n'(1) = \left(\varphi'(1)\right)^n,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} Z_n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \varphi'(1) > 1; \\ 1, & \text{если } \varphi'(1) = 1; \\ 0, & \text{если } \varphi'(1) < 1. \end{cases}$$

В соответствии с этим процесс $\{Z_n\}$ называется *надкритическим*, если $m > 1$; *критическим*, если $m = 1$; *докритическим*, если $m < 1$.

Пусть T – *продолжительность жизни* процесса $\{Z_n\}$, т.е. $Z_{T-1} > 0$, а $Z_T = 0$ (следовательно, $Z_{T+1} = 0$, $Z_{T+2} = 0, \ldots$). Иногда T называют *моментом вырождения* $\{Z_n\}$. Будем в дальнейшем считать, что $p_0 + p_1 < 1$.

Теорема 18.1. *В докритическом и критическом случаях*

$$\mathsf{P}\left(T < +\infty\right) = 1,$$

т.е. процесс $\{Z_n\}$ *вырождается с вероятностью* 1. *В надкритическом случае*

$$\mathsf{P}\left(T < +\infty\right) < 1,$$

т.е. процесс продолжается неограниченно долго с положительной вероятностью.

Доказательство. Рассмотрим вероятность вырождения

$$\mathsf{P}\left(T \leqslant n\right) = \mathsf{P}\left(Z_n = 0\right) = \varphi_n(0). \tag{18.1}$$

Очевидно, события $\{T \leqslant n\}$ не убывают с ростом n, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(T \leqslant n\right) = \mathsf{P}\left(T < +\infty\right) := q.$$

Найдем q. В силу (18.1)

$$q = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\varphi_{n-1}(0)\right) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_{n-1}(0)\right) = \varphi(q),$$

т.е.

$$q = \varphi(q), \quad q \in [0, 1]. \tag{18.2}$$

Поскольку $\varphi''(s) > 0$, то функция $\varphi(s)$ является выпуклой вниз, $\varphi(0) = p_0 \geqslant 0$. Если $\varphi'(1) \leqslant 1$, то уравнение (18.2) имеет единственный корень $q = 1$. Если же $\varphi'(1) > 1$, то наряду с $q_2 = 1$ уравнение (18.2) имеет еще корень $q_1 \in [0, 1)$. Нетрудно показать, что $\varphi_n(0) \to q_1$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением критического случая. В следующей теореме находится асимптотика при $n \to \infty$ *вероятности невырождения* $\mathsf{P}(T > n)$.

Теорема 18.2 (Колмогоров). *Пусть процесс* $\{Z_n\}$ *является критическим и* $\mathsf{D}Z_1 := 2b$, $0 < b < +\infty$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(T > n) \sim \frac{1}{bn}.$$

Доказательство. Положим $P_n = \mathsf{P}(T > n) = \mathsf{P}\left(Z_n > 0\right)$. Тогда

$$P_n = 1 - \varphi_n(0), P_{n+1} = 1 - \varphi_{n+1}(0) \Longrightarrow P_{n+1} = 1 - \varphi\left(1 - P_n\right).$$

Введем функцию $g(x) = 1 - \varphi\left(1 - x\right)$. Ясно, что

$$P_{n+1} = g\left(P_n\right).$$

Заметим, что $g(0) = 0$, $g'(0) = \varphi'(1) = 1$, $g''(0) = -\varphi''(1) = -2b$.

По формуле Тейлора

$$g(x) = x - bx^2 + o\left(x^2\right), \qquad x \to 0.$$

Положим $x = P_n$ и рассмотрим последовательность $a_n = 1/P_n$. Поскольку $P_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$a_{n+1} - a_n = \frac{P_n - P_{n+1}}{P_n P_{n+1}} = \frac{P_n - g\left(P_n\right)}{P_n g\left(P_n\right)} = \\ = \frac{bP_n^2\left(1 + o(1)\right)}{P_n^2\left(1 - bP_n + o\left(P_n\right)\right)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \sim nb \Longrightarrow P_n \sim \frac{1}{bn}.$$

Теорема доказана.

Теорема 18.3 (Яглом). *Если выполнены условия теоремы 18.2, то при $n \to \infty$*

$$\left\{ \frac{Z_n}{bn} \,\middle|\, Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \xi,$$

где ξ – случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром 1.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Лапласа левой части: при $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big(e^{-\lambda Z_n/(bn)} \bigm| Z_n > 0\big) &= \frac{1}{\mathsf{P}\,(Z_n > 0)} \mathsf{E}\big(e^{-\lambda Z_n/(bn)}; Z_n > 0\big) = \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k/(bn)} \mathsf{P}\,(Z_n = k)\,. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$e^{-\lambda/(bn)} - 1 \sim -\lambda/(bn) \sim -P_N,$$

если $N \sim n/\lambda$. Более точно, незначительно изменяя λ (на λ_n: $\lambda_n \downarrow \lambda$) для каждого из всех достаточно больших n можно подобрать такое натуральное N ($N \sim n/\lambda$), что

$$e^{-\lambda_n/(bn)} - 1 = -P_N \Longrightarrow e^{-\lambda_n k/(bn)} = (1 - P_N)^k\,.$$

Поэтому ввиду (18.3)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big(e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \bigm| Z_n > 0\big) &= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\,(Z_n = k)\,(1 - P_N)^k = \\ &= \frac{1}{P_N} \mathsf{P}\,(Z_{n+N} = 0, Z_n > 0) = \\ &= \frac{1}{P_n} \left[\mathsf{P}(T > n) - \mathsf{P}\,(T > n + N)\right] \sim \\ &\sim 1 - \frac{n}{n+N} = \frac{N}{n+N} \sim \frac{1}{1+\lambda}, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Правая часть есть преобразование Лапласа случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметром 1. Осталось заметить, что

$$0 \leqslant \mathsf{E}\big(e^{-\lambda Z_n/(bn)} - e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \bigm| Z_n > 0\big) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{E}\left(e^{-\lambda Z_n/(bn)}\left(\lambda_n-\lambda\right)\frac{Z_n}{bn}\,\middle|\, Z_n>0\right)\leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\lambda_n-\lambda)}{bn}\mathsf{E}\left(Z_n \,|\, Z_n>0\right)=\frac{(\lambda_n-\lambda)}{bnP_n}\overset{n\to\infty}{\to}0,$$

т.к. $\mathsf{E}\left(Z_n \,|\, Z_n>0\right)=1/P_n$. Теорема доказана.

Следующий результат принадлежит Феллеру и Линдваллу (см. [18], [23]).

Теорема 18.4. *В условиях теоремы 18.2 для любого $x_0 \in (0,+\infty)$ при $n\to\infty$*

$$\left\{\frac{Z_{\lfloor nt\rfloor}}{bn}, t\in[0,+\infty)\,\middle|\, Z_0=\lfloor bnx_0\rfloor\right\}\xrightarrow{D} Y,$$

где $Y=\{Y(t),t\in[0,+\infty)\}$ – однородный неотрицательный марковский процесс (с непрерывными траекториями), стартующий из точки x_0, с поглощающим состоянием в точке 0 и переходной плотностью $p(t,x,y)$ при положительных x, y, преобразование Лапласа которой при $t>0$ равно

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}p(t,x,y)\,dy=\exp\left(-\frac{\lambda x}{1+\lambda t}\right)-\exp\left(-\frac{x}{t}\right),\lambda\in(0,+\infty)\,.$$

Замечание 18.1. Сходимость в теореме 18.4 следует понимать как сходимость по распределению в пространстве $D\,[0,a]$ при любом $a\in(0,+\infty)$.

Замечание 18.2. Процесс Y является диффузионным и называется *феллеровской диффузией*. Следует отметить, что феллеровская диффузия удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY(t)=\sqrt{2Y(t)}\,dW(t).$$

Приведем без доказательства следующий результат Ю. В. Прохорова, обобщающий теорему Пуассона для схемы Бернулли.

Лемма 18.1. *Пусть μ_n – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p_n. Если $\lim_{n\to\infty} np_n = c$, $c\in(0,+\infty)$, то*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mathsf{P}\left(\mu_n=k\right)-\mathsf{P}\left(\mu=k\right)\right|\leqslant\frac{2c}{n}\min(2,c),$$

где μ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром c.

Доказательство теоремы 18.4. Зафиксируем произвольное положительное число t и установим сначала сходимость последовательности случайных величин $\left\{Z_{\lfloor nt\rfloor}/(bn) \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnx_0\rfloor\right\}$ при $n \to \infty$. Рассмотрим те частицы из нулевого поколения, которые имеют потомков в $\lfloor nt\rfloor$-м поколении. Пусть μ_n – их число, а $\xi_1^{(nt)}, \xi_2^{(nt)}, \ldots$ – число потомков в $\lfloor nt\rfloor$-м поколении первой, второй, ... таких частиц. Очевидно, что $\mu_n, \xi_1^{\lfloor nt\rfloor}, \xi_2^{\lfloor nt\rfloor}, \ldots$ – независимые случайные величины. В силу теоремы Пуассона для схемы Бернулли (см. также лемму 18.1) с учетом теоремы 18.2 получаем, что при $n \to \infty$

$$\mu_n \xrightarrow{D} \mu, \tag{18.4}$$

где μ имеет распределение Пуассона с параметром x_0/t. Далее, по теореме Яглома при $n \to \infty$

$$\frac{\xi_i^{(nt)}}{bnt} \xrightarrow{D} \xi_i, \tag{18.5}$$

где случайная величина ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ имеет показательное распределение с параметром 1. Ясно, что случайные величины $\mu, \xi_1, \xi_2, \ldots$ можно считать независимыми. В силу (18.4) и (18.5) при любом $x \in [0, +\infty)$

$$\begin{gathered}\mathsf{P}\left(\frac{Z_{\lfloor nt\rfloor}}{bn} \leqslant x \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnx_0\rfloor\right) = \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{\mu_n} \xi_i^{(nt)}/(bn) \leqslant x\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(nt)}/(bn) \leqslant x\right) \mathsf{P}\left(\mu_n = k\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \\ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(t \sum_{i=1}^{k} \xi_i \leqslant x\right) \mathsf{P}\left(\mu = k\right) = \mathsf{P}\left(t\left(\xi_1 + \cdots + \xi_\mu\right) \leqslant x\right),\end{gathered} \tag{18.6}$$

причем это соотношение выполняется равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число, что следует из леммы 18.1. Преобразование Лапласа случайной величины

$t\,(\xi_1 + \cdots + \xi_\mu)$ равно

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,e^{-\lambda t(\xi_1+\cdots+\xi_\mu)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathsf{E}\,e^{-\lambda t\xi_1}\right)^k \mathsf{P}\,(\mu = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\lambda t}\right)^k \frac{(x_0/t)^k}{k!}e^{-x_0/t} = \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda x_0}{1+\lambda t}\right), \quad \lambda \in (0,+\infty)\,. \qquad (18.7)\end{aligned}$$

Из соотношений (18.6) и (18.7) следует, что при любых $x \in [0,+\infty)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\frac{Z_{\lfloor nt\rfloor}}{bn} \leqslant x \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnx_0\rfloor\right) &= \\ = \int_0^x p\,(t, x_0, u)\;du + \exp\left(-x_0/t\right) \qquad (18.8)\end{aligned}$$

равномерно по $x_0 \in (0,c)$, где c – произвольное положительное число.

2) Установим сходимость конечномерных распределений методом математической индукции по размерности m распределения. При $m = 1$ эта сходимость уже установлена. Пусть при некотором $m \in \mathbb{N}$, произвольных моментах времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ таких, что $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, и любых положительных числах $x_1, \ldots, x_m$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i\rfloor}}{bn} \leqslant x_i,\ i = 1,\ldots,m \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnx_0\rfloor\right) = \\ &= \int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_m} p\,(t_1, x_0, u_1)\,\times \\ &\qquad \times p\,(t_2 - t_1, u_1, u_2)\ldots p\,(t_m - t_{m-1}, u_{m-1}, u_m)\;du_1\ldots du_m. \qquad (18.9)\end{aligned}$$

Запишем пользуясь тем, что ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона является однородным марковским процессом, что при $t_{m+1} > t_m$ и произвольном положительном x_{m+1}

$$\mathsf{P}\left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i\rfloor}}{bn} \leqslant x_i, i = 1,\ldots,m+1 \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnx_0\rfloor\right) =$$

$$= \int_0^{x_m} \mathsf{P}\Bigg(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i \rfloor}}{bn} \leqslant x_i, i = 1, \ldots, m; \\ \frac{Z_{\lfloor nt_m \rfloor}}{bn} \in du_m \;\Bigg|\; Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \Bigg) \times \\ \times \mathsf{P}\left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_{m+1} \rfloor}}{bn} \leqslant x_{m+1} \;\middle|\; Z_{\lfloor nt_m \rfloor} = \lfloor bnu_m \rfloor \right),$$

причем вторая вероятность равна

$$\mathsf{P}\left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_{m+1} \rfloor - \lfloor nt_m \rfloor}}{bn} \leqslant x_{m+1} \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnu_m \rfloor \right)$$

и сходится, ввиду (18.8), равномерно по $u_m \in [0, x_m]$ к

$$\int_0^{x_{m+1}} p\left(t_{m+1} - t_m, u_m, u_{m+1}\right) du_{m+1}.$$

Откуда, учитывая (18.9), получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(0 < \frac{Z_{\lfloor nt_i \rfloor}}{bn} \leqslant x_i, i = 1, \ldots, m+1 \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor \right) = \\ = \int_0^{x_m} \Bigg\{ \Bigg[\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{m-1}} p\left(t_1, x_0, u_1\right) \times \cdots \times \\ \times p\left(t_{m-1} - t_{m-2}, u_{m-2}, u_{m-1}\right) du_1 \ldots du_{m-1} \Bigg] \times \\ \times p\left(t_m - t_{m-1}, u_{m-1}, u_m\right) du_m \times \\ \times \left[\int_0^{x_{m+1}} p\left(t_{m+1} - t_m, u_m, u_{m+1}\right) du_{m+1} \right] \Bigg\} = \\ = \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{m+1}} p\left(t_1, x_0, u_1\right) \times \cdots \times \\ \times p\left(t_{m+1} - t_m, u_m, u_{m+1}\right) du_1 \ldots du_{m+1}.$$

Итак, доказана справедливость (18.9) с заменой m на $(m+1)$. Случай, когда $x_1 > 0, \ldots, x_{m-1} > 0$, а $x_m = 0$ рассматривается аналогично. Следовательно, сходимость конечномерных распределений установлена.

3) Положим

$$Z_n^*(t) = \frac{Z_{\lfloor nt \rfloor}}{bn}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Покажем, что при любых ε, $a \in (0, +\infty)$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(w''_{Z_n^*}(\delta; 0, a) \geqslant \varepsilon \bigm| Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor\bigr) = 0 \tag{18.10}$$

равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число (определение модуля непрерывности $w''_x(\delta)$ при $x \in D[0,1]$ дано в лекциях 2–3; если в этом определении отрезок $[0,1]$ заменить на $[a,b]$ при $0 \leqslant a \leqslant b < +\infty$, то получим определение $w''_x(\delta; a, b)$ при $x \in D[a,b]$).

Лемма 18.2. *Если i, j, k, l – неотрицательные целые числа, $i \leqslant j \leqslant k$, то при $\gamma = 4/3$*

$$\mathsf{E}^{(l)}\bigl(|Z_k - Z_j|^\gamma |Z_j - Z_i|^\gamma\bigr) \leqslant K_1 (k-i)^\gamma l^{\gamma/2} (jl + l^2)^{\gamma/4},$$

где K_1 – положительная постоянная, не зависящая от i, j, k, l; $\mathsf{E}^{(l)}(\dots)$ означает $\mathsf{E}(\dots \mid Z_0 = l)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathsf{E}^{(l)}\bigl(|Z_k - Z_j|^\gamma |Z_j - Z_i|^\gamma\bigr) = \mathsf{E}^{(l)}\bigl(|Z_j - Z_i|^\gamma \mathsf{E}^{(Z_j)}(|Z_k - Z_j|^\gamma)\bigr).$$

Поскольку $\gamma/2 < 1$, то по неравенству Йенсена (учитываем, что $\mathsf{D}Z_k = k\mathsf{D}Z_1$)

$$\mathsf{E}^{(Z_j)}\bigl(|Z_k - Z_j|^\gamma\bigr) \leqslant \bigl(\mathsf{E}^{(Z_j)}\bigl(|Z_k - Z_j|^2\bigr)\bigr)^{\gamma/2} = \bigl(2bZ_j\,(k-j)\bigr)^{\gamma/2}.$$

Теперь положим $p = 3/2$, $q = 3$ ($1/p + 1/q = 1$, $1/p = \gamma/2$, $1/q = \gamma/4$). По неравенству Гельдера

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^{(l)}\bigl(|Z_j - Z_i|^\gamma Z_j^{\gamma/2}\bigr) &= \mathsf{E}^{(l)}\bigl(\bigl(|Z_j - Z_i|^2\bigr)^{1/p} (Z_j^2)^{1/q}\bigr) \leqslant \\
&\leqslant \bigl(\mathsf{E}^{(l)}\bigl(|Z_j - Z_i|^2\bigr)\bigr)^{1/p} \bigl(\mathsf{E}^{(l)}(Z_j^2)\bigr)^{1/q} = \\
&= \bigl(\mathsf{E}^{(l)}\bigl(|Z_j - Z_i|^2\bigr)\bigr)^{\gamma/2} \bigl(\mathsf{E}^{(l)}(Z_j^2)\bigr)^{\gamma/4} = \\
&= (2bl\,(j-i))^{\gamma/2} \bigl(2bjl + l^2\bigr)^{\gamma/4}.
\end{aligned}$$

Осталось учесть, что $k - j \leqslant k - i$, $j - i \leqslant k - i$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 18.2 при $0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant a$

$$\mathsf{E}\bigl(|Z_n^*(t) - Z_n^*(t_1)|^\gamma\, |Z_n^*(t_2) - Z_n^*(t_1)|^\gamma \bigm| Z_0 = \lfloor bnx_0 \rfloor\bigr) \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \left(\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor\right)^{\gamma} \times$$
$$\times \left(\lfloor bnx_0 \rfloor\right)^{\gamma/2} \left(\lfloor nt \rfloor \lfloor bnx_0 \rfloor + \left(\lfloor bnx_0 \rfloor\right)^2\right)^{\gamma/4} / (bn)^{2\gamma} \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \left(t_2 - t_1\right)^{\gamma}, \tag{18.11}$$

где K_2 – положительная постоянная, не зависящая от t_1, t, t_2; постоянная K_2 может быть выбрана общей для всех $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число.

Вспоминая лемму 2.6 и учитывая (18.11), получаем соотношение (18.10), которое выполняется равномерно по $x_0 \in (0, c)$, где c – произвольное положительное число.

4) Из сходимости конечномерных распределений и соотношения (18.10), ввиду теоремы 2.2, следует утверждение доказываемой теоремы.

Следующий результат установлен Ламперти, Неем и Дарреттом (см. [16], [21]).

Теорема 18.5. *В условиях теоремы 18.2 при $n \to \infty$*

$$\left\{ \frac{Z_{\lfloor nt \rfloor}}{bn}, t \in [0, 1] \,\middle|\, T > n \right\} \xrightarrow{D} Y^{+},$$

где $Y^{+} = \{Y^{+}(t), t \in [0, 1]\}$ – неоднородный марковский процесс (с непрерывными траекториями), стартующий из нуля и положительный при $t \in (0, 1]$, с переходной плотностью

$$p\left(s, x; t, y\right) =$$
$$= \begin{cases} e^{-y}, \quad s = 0, \quad t = 1, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ t^{-2}\, e^{-y/t}\left[1 - e^{-y/(1-t)}\right], \\ \qquad 0 = s < t < 1, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ p\left(t - s, x, y\right) \dfrac{1 - \exp\left(-y/\left(1 - t\right)\right)}{1 - \exp\left(-x/(1 - s)\right)}, \\ \qquad 0 < s < t < 1, \quad x > 0, \quad y > 0; \\ p\left(1 - s, x, y\right) / \left[1 - \exp\left(-x/(1 - s)\right)\right], \\ \qquad 0 < s < t = 1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

Здесь $p(t, x, y)$ та же функция, что и в теореме 18.4.

Замечание 18.3. Процесс Y^{+} является диффузионным с коэффициентами сноса и диффузии

$$a(s, x) = 2\frac{x/(1 - s)}{\exp\left(x/(1 - s)\right) - 1} \quad \text{и} \quad \sigma^2(s, x) = x\left[2 + a(s, x)\right]$$

соответственно.

Доказательство. Установим сначала сходимость конечномерных распределений. Рассмотрим $m \in \{2, 3, \dots\}$ и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$. Покажем, что для любых положительных $x_1, \dots, x_m$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(Z_n^*(t_i) \leqslant x_i, i = 1, \dots, m \;\big|\; T > n\big) = \\ = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} p\,(0, 0; t_1, y_1) \times \\ \times p\,(t_1, y_1; t_2, y_2) \dots p\,(t_{m-1}, y_{m-1}; 1, y_m)\; dy_1 \dots dy_m.\end{aligned} \tag{18.12}$$

Установим (18.12) индукцией по m. При $m = 2$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\big(Z_n^*(t_1) \leqslant x_1, Z_n^*(1) \leqslant x_2 \;\big|\; T > n\big) = \\ = \int_0^{x_1} \mathsf{P}\left(\frac{Z_{\lfloor nt_1\rfloor}}{bn} \in dy_1 \;\middle|\; T > \lfloor nt_1\rfloor\right) \times \\ \times \mathsf{P}\left(0 < \frac{Z_{n-\lfloor nt_1\rfloor}}{bn} \leqslant x_2 \;\middle|\; Z_0 = \lfloor bny_1\rfloor\right) \frac{\mathsf{P}\,(T > \lfloor nt_1\rfloor)}{\mathsf{P}(T > n)}.\end{aligned}$$

Откуда, применяя теоремы 18.2, 18.3 и соотношение (18.8), получаем, что предел правой части равен

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1} \frac{1}{t_1^2}\, e^{-y_1/t_1}\, dy_1 \int_0^{x_2/(1-t_1)} p\left(1, \frac{y_1}{1-t_1}, y_2\right) dy_2 = \\ = \int_0^{x_1} \frac{1}{t_1^2}\, e^{-y/t_1}\, dy_1 \int_0^{x_2} p\,(1 - t_1, y_1, y_2)\; dy_2 = \\ = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} p\,(0, 0; t_1, y_1)\, p\,(1 - t_1, y_1, y_2)\; dy_1\, dy_2\end{aligned}$$

(здесь использовано, что $cp(ct, cx, cy) = p(t, x, y)$, $c > 0$). Итак, соотношение (18.12) при $m = 2$ доказано.

Пусть (18.12) справедливо при некотором $m \geqslant 2$. Тогда, снова применяя теорему 18.2 и соотношение (18.8), получаем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\big(Z_n^*(t_i) \leqslant x_i, i = 1, \dots, m+1 \;\big|\; T > n\big) = \\ = \int_0^{x_m} \mathsf{P}\big(Z_n^*(t_i) \leqslant x_i, i = 1, \dots, m-1; \\ Z_n^*(t_m) \in dy_m \;\big|\; T > \lfloor t_m n\rfloor\big) \times\end{aligned}$$

$$\times \mathsf{P}\biggl(0 < \frac{Z_{n-\lfloor nt_m \rfloor}}{bn} \leqslant x_{m+1} \biggm| Z_0 = \lfloor bny_m \rfloor\biggr) \frac{\mathsf{P}\left(T > \lfloor t_m n \rfloor\right)}{\mathsf{P}\left(T > n\right)} \overset{n\to\infty}{\to}$$

$$\overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{t_m^2} \int_0^{x_m/t_m} dy_m \biggl\{ \biggl[\int_0^{x_1/t_m} \ldots \int_0^{x_{m-1}/t_m} p\left(0, 0; \frac{t_1}{t_m}, y_1\right) \times$$

$$\times\, p\left(\frac{t_1}{t_m}, y_1; \frac{t_2}{t_m}, y_2\right) \ldots p\biggl(\frac{t_{m-1}}{t_m}, y_{m-1}; 1, y_m\biggr)\, dy_1 \ldots dy_{m-1}\biggr] \times$$

$$\times \int_0^{\frac{x_{m+1}}{1-t_m}} p\left(1, \frac{y_m}{1-t_m}, y_{m+1}\right) dy_{m+1} \biggr\}.$$

Учитывая связь $p\,(s, x; t, y)$ с $p\,(t-s, x, y)$ видим, что правая часть равна

$$\int_0^{x_1/t_m} \ldots \int_0^{x_{m-1}/t_m} \int_0^{x_{m+1}/(1-t_m)} \frac{1}{t_1^2} e^{-y_1 t_m/t_1} \times$$

$$\times\, p\left(\frac{t_2 - t_1}{t_m}, y_1, y_2\right) \ldots p\left(\frac{t_m - t_{m-1}}{t_m}, y_{m-1}, y_m\right) \times$$

$$\times\, p\left(1, \frac{y_m}{1-t_m}, y_{m+1}\right) dy_1 \ldots dy_{m+1} =$$

$$= \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_m} \int_0^{x_{m+1}} \frac{1}{t_1^2}\, e^{-y_1/t_1} \times$$

$$\times\, p\,(t_2 - t_1, y_1, y_2) \ldots p\,(t_m - t_{m-1}, y_{m-1}, y_m) \times$$

$$\times\, p\,(1 - t_m, y_m, y_{m+1})\; dy_1 \ldots dy_{m+1} =$$

$$= \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{m+1}} p\,(0, 0; t_1, y_1) \times$$

$$\times\, p\,(t_1, y_1; t_2, y_2) \ldots p\,(t_{m-1}, y_m; 1, y_{m+1})\; dy_1 \ldots dy_{m+1}.$$

Итак, соотношение (18.12) с заменой m на $(m+1)$ доказано. Следовательно, сходимость конечномерных распределений установлена.

Покажем, что любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(w''_{Z_n^*}(\delta) \geqslant \varepsilon \bigm| T > n\bigr) = 0. \tag{18.13}$$

Заметим, что при $\gamma \in (0, 1)$ и $\delta < \gamma$

$$w''_{Z_n^*}(\delta) \leqslant \max_{i \leqslant \gamma n} \frac{Z_i}{bn} + w''_{Z_n^*}\left(\delta; \gamma - \delta, 1\right). \tag{18.14}$$

Случайная последовательность $\{Z_i/bn\}$ является мартингалом, поэтому по неравенству Дуба

$$\mathsf{P}\left(\max_{i\leqslant\gamma n}\frac{Z_i}{bn}\geqslant\varepsilon\;\middle|\;T>n\right)\leqslant\mathsf{P}\left(\max_{i\leqslant\gamma n}\frac{Z_i}{bn}\geqslant\varepsilon\right)/\mathsf{P}(T>n)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mathsf{E}Z_{\gamma n}^2}{b^2n^2\varepsilon^2\mathsf{P}\left(T>n\right)}\leqslant\frac{2b\gamma n+1}{b^2n^2\varepsilon^2\mathsf{P}\left(T>n\right)}.$$

Вспоминая теорему 18.2, получаем, что

$$\lim_{\gamma\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{i\leqslant\gamma n}\frac{Z_i}{bn}\geqslant\varepsilon\;\middle|\;T>n\right)=0. \tag{18.15}$$

Далее,

$$\mathsf{P}\big(w''_{Z_n^*}(\delta;\gamma-\delta,1)\geqslant\varepsilon\;\big|\;T>n\big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\mathsf{P}(T>n)}\int_0^{+\infty}\mathsf{P}\left(\frac{Z_{(\gamma-\delta)n}}{bn}\in dx, T>(\gamma-\delta)n\right)\times$$
$$\times\,\mathsf{P}\big(w''_{Z_n^*}(\delta)\geqslant\varepsilon\;\big|\;Z_0=\lfloor bnx\rfloor\big).$$

Разобьем интеграл на два при $A>0$: в первом $I_1\left(n,\gamma,A\right)$ интегрирование ведется от 0 до A, а во втором $I_2\left(n,\gamma,A\right)$ – от A до $+\infty$. Очевидно, что

$$I_2\left(n,\gamma,A\right)\leqslant\mathsf{P}\left(\frac{Z_{(\gamma-\delta)n}}{bn}>A\;\middle|\;T>(\gamma-\delta)n\right)\frac{\mathsf{P}\left(T>(\gamma-\delta)n\right)}{\mathsf{P}(T>n)}.$$

Из теорем 18.2 и 18.3 следует, что

$$\lim_{A\to+\infty}\limsup_{n\to\infty}I_2\left(n,\gamma,A\right)=0. \tag{18.16}$$

Ввиду (18.10)

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}I_1\left(n,\gamma,A\right)=0. \tag{18.17}$$

Из (18.14)–(18.17) следует (18.13).

Из сходимости конечномерных распределений и соотношения (18.13), ввиду теоремы 2.2, следует утверждение доказываемой теоремы.

Лекции 19–20
Ветвящиеся процессы в случайной среде

При рассмотрении ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона предполагалось, что частицы в разных поколениях размножаются в соответствии с одним и тем же вероятностным законом. Предположим теперь, что эти законы зависят от номера поколения, т.е. при $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathsf{P}(\text{одна частица из } n\text{-го поколения порождает } k \text{ частиц}) = p_k^{(n)}.$$

Положим $\Pi_n = \{p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Совокупность $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ называется *средой* (в данном случае *изменяющейся*, в отличие от *постоянной* для процесса Гальтона–Ватсона). Все остальные предположения (одна частица в нулевом поколении, частицы размножаются независимо друг от друга и от предыстории процесса) сохраним. Получившийся процесс называется *ветвящимся процессом в изменяющейся среде.*

Обозначим Z_n число частиц в n-м поколении этого процесса. Интересно отметить,что случайная последовательность $\{Z_n\}$ является марковской цепью, и если $p_0^{(n)} > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то п.н. существует предел $\{Z_n\}$ при $n \to \infty$, который может равняться и $+\infty$. Действительно, если, например, цепь $\{Z_n\}$ имеет две предельные точки $m, n \in \mathbb{N}$, то она совершает бесконечное число переходов из состояния m в состояние n, но вероятность этого события равна нулю, поскольку вероятность хотя бы одного перехода из состояния m в состояние n меньше единицы (есть шанс, что цепь выродится за один шаг). Оказывается (см. [24]), что если $p_1^{(n)} > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то предел $\{Z_n\}$ при $n \to \infty$ равен некоторому натуральному числу с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_1^{(n)} > 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(1 - p_1^{(n)}\bigr) < +\infty.$$

Это совсем просто понять, когда предел $\{Z_n\}$ равен единице. Читателю предоставляется возможность доказать справедливость данного утверждения в случае, когда этот предел больше единицы.

Рассмотренная модель ветвящегося процесса в изменяющейся среде имеет один недостаток, состоящий в том, что затруднительно хранить информацию о счетном числе законов размножения. Поэтому возникает мысль считать, что сами эти законы порождены некоторым случайным механизмом, а при условии, что они зафиксированы, размножение частиц происходит так, как описано выше.

Всюду в дальнейшем будем считать, что случайные последовательности $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Совокупность $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$ называется *случайной средой.*

Формализуем приведенное выше описание процесса. Введем производящие функции числа непосредственных потомков:

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} s^k, \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

В случае ветвящегося процесса в изменяющейся среде производящая функция числа частиц в n-ом поколении равна $\varphi_0 \left(\varphi_1 \left(\varphi_2 \left(\ldots \varphi_{n-1}(s) \ldots\right)\right)\right)$.

Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС) определяется соотношением

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(s^{\xi_n} \mid \Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-1}\right) &= \\ &= \varphi_0 \left(\varphi_1 \left(\varphi_2 \left(\ldots \varphi_{n-1}(s) \ldots\right)\right)\right), \quad s \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{19.1}$$

где ξ_n означает число частиц в n-м поколении, $\xi_0 = 1$. Таким образом, при условии, что случайная среда фиксирована, получается ветвящийся процесс в изменяющейся среде.

Положим

$$\widehat{\mathsf{P}}\left(\ldots\right) = \mathsf{P}\left(\ldots \mid \Pi_0, \Pi_1, \ldots\right), \qquad \widehat{\mathsf{E}}\left(\ldots\right) = \mathsf{E}\left(\ldots \mid \Pi_0, \Pi_1, \ldots\right).$$

По свойству условного математического ожидания для любого борелевского множества B из R^∞

$$\mathsf{P}\left(\{\xi_n\} \in B\right) = \mathsf{E}\widehat{\mathsf{P}}\left(\{\xi_n\} \in B\right). \tag{19.2}$$

Из (19.1) вытекает, что

$$\widehat{\mathsf{E}}\xi_n = \varphi_0'(1)\varphi_1'(1) \ldots \varphi_{n-1}'(1). \tag{19.3}$$

В дальнейшем предполагается, что случайные величины $p_0^{(0)}, p_1^{(0)}$ положительны п.н. Положим

$$X_n = \ln \varphi'_{n-1}(1), n \in \mathbb{N}.$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое называется *сопровождающим* для процесса $\{\xi_n\}$. Тогда (19.3) означает, что

$$\widehat{\mathsf{E}}\xi_n = e^{S_n}. \tag{19.4}$$

Поэтому в силу (19.2)

$$\mathsf{E}\xi_n = \mathsf{E}(\widehat{\mathsf{E}}\xi_n) = \mathsf{E}\, e^{S_n}. \tag{19.5}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что математическое ожидание $\mathsf{E}X_1$ определено, т.е. либо конечно, либо равно $+\infty$ или $-\infty$. Случайное блуждание $\{S_n\}$ ведет себя по-разному в зависимости от знака сноса. Если $0 < \mathsf{E}X_1 \leqslant +\infty$, то в силу усиленного закона больших чисел $S_n \to +\infty$ п.н. при $n \to \infty$ и по лемме Фату $\mathsf{E}\xi_n \to +\infty$. Если же $0 > \mathsf{E}X_1 \geqslant -\infty$, то $S_n \to -\infty$ п.н. при $n \to \infty$. Поэтому кажется разумной следующая классификация. ВПСС называется *надкритическим*, если $0 < \mathsf{E}X_1 \leqslant +\infty$; *докритическим*, если $-\infty \leqslant \mathsf{E}X_1 < 0$; *критическим*, если $\mathsf{E}X_1 = 0$.

ВПСС вырождается с вероятностью 1, если он является критическим или докритическим. Действительно,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{P}}\,(\xi_n > 0) = 1 - \varphi_0\,(\varphi_1\,(\ldots(\varphi_{n-1}(0))\ldots)) \leqslant \\ \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n} \varphi'(1)\varphi'(1)\ldots\varphi'_{k-1}(1) = \min_{1\leqslant k\leqslant n} e^{S_k} = e^{\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k}.\end{aligned} \tag{19.6}$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\,(\xi_n > 0) \leqslant \mathsf{E}\, e^{\min_{0\leqslant k\leqslant n} S_k}. \tag{19.7}$$

При $\mathsf{E}X_1 \leqslant 0$ $\min_{0\leqslant k\leqslant n} S_k \to -\infty$ и по теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\,(\xi_n > 0) = 0,$$

значит, ВПСС $\{\xi_n\}$ вырождается с вероятностью 1. В надкритическом случае (при некоторых дополнительных предположениях) случайный процесс $\{\xi_n\}$ не вырождается с положительной вероятностью.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением критического случая. При этом будем предполагать, что $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Нашей целью является нахождение асимтотики вероятности невырождения $\mathsf{P}(\xi_n > 0)$ и теорема о сходимости по растределению в $D[0,1]$ последовательности случайных процессов

$$\left\{ \frac{\xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\widehat{\mathsf{E}}\xi_{\lfloor nt \rfloor}},\ t \in [0,1] \,\middle|\, \xi_n > 0 \right\}$$

при $n \to \infty$. Заметим, что сходимость $\xi_{\lfloor nt \rfloor}/\widehat{\mathsf{E}}\xi_{\lfloor nt \rfloor}$ п.в. обеспечивается теоремой Дуба о сходимости мартигналов, поскольку случайная последовательность $\{\xi_n/\widehat{\mathsf{E}}\xi_n\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является неотрицательным мартингалом. Рассмотрение условия $\{\xi_n > 0\}$ вызвано тем, что процесс $\{\xi_n\}$ вырождается с вероятностью 1.

Ввиду (19.7) ясно, что событие $\{\xi_n > 0\}$ связано с такими траекториями сопровождающего случайного блуждания $\{S_n\}$, что $\min_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k > -x$ при положительных x, близких к нулю.

Положим при $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_n = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} S_i.$$

Для блуждания $\{S_n\}$ рассмотрим последовательность строгих нижних лестничных моментов $T_1', T_2', \ldots$ и введем функцию

$$v(x) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(S_{T_i'} \geqslant -x\right), & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В лекции 15 (см. теорему 15.3 и соотношения (15.16)–(15.18)) показано, что для $x \in [0, +\infty)$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(L_n \geqslant -x) \sim \frac{c_0 v(x)}{\sqrt{n}}, \tag{19.8}$$

где c_0 – положительная постоянная; существует такая положительная постоянная K, не зависящая от x, n, что при всех $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{P}(L_n \geqslant -x) \leqslant \frac{K v(x)}{\sqrt{n}}; \tag{19.9}$$

функция $v(x)$ является гармонической в следующем смысле:

$$\mathsf{E}v(x+X_1)=v(x), \quad x\geqslant 0; \tag{19.10}$$

наконец, при $x\to+\infty$

$$v(x)=x/\mathsf{E}S_{T'}+O(1). \tag{19.11}$$

Рассмотрим для каждого $n\in\mathbb{N}$ минимальные σ-алгебры, образованные $\Pi_0,\Pi_1,\ldots,\Pi_{n-1},\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$:

$$\mathfrak{F}_n=\sigma\left(\Pi_0,\Pi_1,\ldots,\Pi_{n-1};\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n\right).$$

Последовательность $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2,\ldots$ образует фильтрацию $\mathfrak{F}$.

Лемма 19.1. *Случайная последовательность*

$$v(S_n)I\left\{L_n\geqslant 0\right\}, \quad n\in\mathbb{N},$$

образует мартингал относительно фильтрации F с мерой P.

Доказательство. Требуется показать, что при каждом $n\in\mathbb{N}$

$$\mathsf{E}\left(v(S_{n+1})I\left\{L_{n+1}\geqslant 0\right\}\mid\mathfrak{F}_n\right)=v(S_n)I\left\{L_n\geqslant 0\right\}. \tag{19.12}$$

Действительно,

$$v(S_{n+1})I\left\{L_{n+1}\geqslant 0\right\}=v(S_n+X_{n+1})I\left\{L_n\geqslant 0\right\},$$

поэтому

$$\mathsf{E}\Big(v(S_{n+1})I\left\{L_{n+1}\geqslant 0\right\}\Bigm|\mathfrak{F}_n\Big)=I\left\{L_n\geqslant 0\right\}\mathsf{E}\Big(v(S_n+X_{n+1})\Bigm|\mathfrak{F}_n\Big).$$

Поскольку функция $v(x)$ является гармонической (см. (19.10))

$$\mathsf{E}\Big(v(S_n+X_{n+1})\Bigm|\mathfrak{F}_n\Big)=v(S_n),$$

что и приводит к (19.12). Лемма доказана.

Введем вероятностные меры P_n^+ на $\mathfrak{F}_n$:

$$d\mathsf{P}_n^+=v(S_n)I\left\{L_n\geqslant 0\right\}\,d\mathsf{P}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Ввиду леммы 19.1 они согласованы, поэтому (возможно с заменой исходного вероятностного пространства) существует такая мера

P^+, определенная на минимальной σ-алгебре, содержащей все σ-алгебры $\mathfrak{F}_n$, что ограничение P^+ на $\mathfrak{F}_n$ совпадает с P_n^+, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, для любой $\mathfrak{F}_n$-измеримой знакоопределенной или ограниченной случайной величины Y_n, $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$\mathsf{E}^+ Y_n = \mathsf{E}\left(Y_n v(S_n) I\left\{L_n \geqslant 0\right\}\right), \tag{19.13}$$

где E^+ означает математическое ожидание, соответствующее мере P^+.

Лемма 19.2. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда для любой* $\mathfrak{F}_k$*-измеримой ограниченной случайной величины* U_k, $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(U_k \mid L_n \geqslant 0\right) = \mathsf{E}^+ U_k. \tag{19.14}$$

Если, кроме того, последовательность $U_1, U_2, \ldots$ *равномерно ограничена, согласована с фильтрацией* F *и сходится* P^+*-п.н. к случайной величине* U_∞, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(U_n \mid L_n \geqslant 0\right) = \mathsf{E}^+ U_\infty. \tag{19.15}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(U_k \mid L_n \geqslant 0\right) &= \mathsf{E}\left(U_k I\left\{L_k \geqslant 0\right\} I\left\{L_{k,n} \geqslant -S_k\right\}\right)/\mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right) = \\ &= \mathsf{E}\left(U_k I\left\{L_k \geqslant 0\right\} \mathsf{P}\left(L_{k,n} \geqslant -x\right)|_{x=S_k}\right)/\mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right),\end{aligned}$$

где $L_{k,n} = \min_{0\leqslant i\leqslant n-k}\left(S_{k+i} - S_k\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Откуда по теореме о мажорируемой сходимости с учетом (19.8), (19.9) и (19.13) получаем (19.14).

Выберем произвольное число $\gamma > 1$. Тогда аналогично получаем, что при $k \leqslant n$

$$\begin{aligned}&\left|\mathsf{E}\left(U_n - U_k \mid L_{\gamma n} \geqslant 0\right)\right| = \\ &\quad = \left|\mathsf{E}\left(\left(U_n - U_k\right) I\left\{L_n \geqslant 0\right\} \mathsf{P}(L_{(\gamma-1)n} \geqslant -x)|_{x=S_n}\right)\right| / \mathsf{P}\left(L_{\gamma n} \geqslant 0\right) \\ &\quad \leqslant K_1 \mathsf{E}\left(\left|U_n - U_k\right| v\left(S_n\right); L_n \geqslant 0\right) = K_1 \mathsf{E}^+\left|U_n - U_k\right|,\end{aligned} \tag{19.16}$$

где K_1 – положительная постоянная, не зависящая от k и n. Переходя к пределу при $n \to \infty$, а затем при $k \to \infty$, получаем из (19.16), что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(U_n \mid L_{\gamma n} \geqslant 0\right) - \mathsf{E}^+ U_\infty \leqslant 0,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(U_n \,|\, L_{\gamma n} \geqslant 0\right) - \mathsf{E}^+ U_\infty \geqslant 0.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(U_n \,|\, L_{\gamma n} \geqslant 0\right) = \mathsf{E}^+ U_\infty.$$

Для справедливости (19.15) осталось заметить, что

$$\mathsf{E}\left(U_n \,|\, L_{\gamma n} \geqslant 0\right) = \frac{\mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right)}{\mathsf{P}\left(L_{\gamma n} \geqslant 0\right)} \mathsf{E}\left(U_n \,|\, L_n \geqslant 0\right) - \\ - \frac{1}{\mathsf{P}\left(L_{\gamma n} \geqslant 0\right)} \mathsf{E}\left(U_n; n < T_1' \leqslant \gamma n\right),$$

причем, ввиду соотношения (19.8), рассматриваемого при $x = 0$,

$$\lim_{\gamma\to 1} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{P}\left(n < T_1' \leqslant \gamma n\right)}{\mathsf{P}\left(L_{\gamma n} \geqslant 0\right)} = 0.$$

Лемма доказана.

Случайная последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ при замене исходной вероятностной меры P на P^+ перестает быть случайным блужданием, но является, как нетрудно понять, однородной неотрицательной марковской цепью с переходной функцией

$$\mathsf{P}^+\left(x, dy\right) = \frac{v(y)}{v(x)} \mathsf{P}\left(x + X_1 \in dy\right), \qquad x, y \geqslant 0.$$

Эта марковская цепь получила в англоязычной литературе название *random walk conditioned to stay positive* и является популярным объектом научных исследований. Рассмотрим некоторые свойства указанной марковской цепи.

Введем случайную величину

$$\nu = \min\left\{m \geqslant 1 \colon S_{m+n} \geqslant S_m \text{ для любого } n \in \mathbb{N}_0\right\},$$

т.е. ν – первый среди всех таких моментов времени, когда будущая траектория лежит не ниже положения в этот момент. Другими словами, случайный момент ν является временем наступления *первого перспективного минимума* случайной последовательности $\{S_n\}$. Напомним, что τ_1' означает первый слабый верхний лестничный момент для $\{S_n\}$. Следующий, важный для дальнейшего результат принадлежит Танака (см. [26]).

Лемма 19.3. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *и исходная мера* P *заменена на* P^+. *Тогда* $\nu < +\infty$ P^+*-п.н. и*

1) *случайные последовательности* $\{S_n\}$ *и* $\{S_n^*\}$, *где* $S_n^* = S_{\nu+n} - S_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$, *имеют одинаковое распределение*;

2) *случайные последовательности* $(\nu, S_1, \ldots, S_\nu)$ *и* $\{S_n^*\}$ *независимы*;

3) *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и* $x \geqslant 0$ *выполняется равенство*

$$\mathsf{P}^+\left(\nu = k, S_\nu \in dx\right) = \mathsf{P}\left(\tau_1' = k, S_{\tau_1'} \in dx\right).$$

Доказательство. Пусть $x \geqslant 0$. Ввиду монотонности функции $v(x)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^+\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I\left\{S_n \leqslant x\right\}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{E}^+ I\left\{S_n \leqslant x\right\} = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left(I\left\{S_n \leqslant x\right\} v\left(S_n\right); L_n \geqslant 0\right) \leqslant \\
&\leqslant v(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{E}\left(I\left\{S_n \leqslant x\right\}; L_n \geqslant 0\right) = \\
&= v(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{P}\left(S_n \leqslant x, L_n \geqslant 0\right) < +\infty \qquad (19.17)
\end{aligned}$$

(по поводу последней суммы см. соотношение (15.15)). Из соотношения (19.17) следует, что марковская цепь $\{S_n\}$ уходит в $+\infty$ при $n \to \infty$ P^+-п.н. Но это означает, что $\nu < +\infty$ P^+-п.н. Действительно, $S_1 \geqslant 0$ и существует такое натуральное число n_0, что $S_n > S_1$ при $n > n_0$. Тогда ν является моментом первого достижения минимума для последовательности $S_1, \ldots, S_{n_0}$.

Положим

$$h_z(x) = \frac{v\left(x - z\right)}{v(x)}, \qquad x, z \in [0, +\infty).$$

Заметим, что $0 \leqslant h_z(x) \leqslant 1$ при всех $x, z \in [0, +\infty)$; $h_z(x) = 0$ при $0 \leqslant x < z$; $\lim_{x \to +\infty} h_z(x) = 1$ при $z \in [0, +\infty)$, так как $v(x) \to +\infty$ и $v(x) - v\left(x - z\right) = O(1)$ при $x \to +\infty$ (см. соотношение (19.11)). Кроме того, в силу (19.10)

$$\int_0^{+\infty} h_z(y) \mathsf{P}^+\left(x, dy\right) = h_z(x), \qquad 0 \leqslant z \leqslant x.$$

Поэтому случайная последовательность $\{h_z(S_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры P^+.

Положим для $z > 0$ и $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sigma_{z,k} = \min\{n\colon n \geqslant k, S_n < z\}.$$

Это – марковский момент относительно фильтрации $\mathfrak{F}$, поэтому случайная последовательность $\left\{h_z\left(S_{n\wedge\sigma_{z,k}}\right), n \in \mathbb{N}_0\right\}$ при $z > 0$ и $k \in \mathbb{N}_0$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры P^+. Следовательно, при $n \geqslant k$, $z > 0$, $x \geqslant 0$

$$\mathsf{E}^+\left(h_z\left(S_{n\wedge\sigma_{z,k}}\right) \,\Big|\, S_k = x\right) = h_z(x). \tag{19.18}$$

Так как $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ P^+-п.н., то из (19.18) по теореме о мажорируемой сходимости получаем, что при $k \in \mathbb{N}_0$, $z > 0$, $x \geqslant 0$

$$\mathsf{P}^+(S_k \geqslant z, S_{k+1} \geqslant z, \ldots \mid S_k = x) = h_z(x).$$

Поэтому, полагая $x_0 = y_0 = 0$, находим, что при $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}^+(\nu = k, S_1 \in dx_1, \ldots, S_k \in dx_k, S_1^* \in dy_1, \ldots, S_m^* \in dy_m) = \\
&\quad = I\{x_1 > x_k, \ldots, x_{k-1} > x_k\} I\{y_1 \geqslant 0, \ldots, y_{m-1} \geqslant 0\} \times \\
&\qquad \times \prod_{i=1}^{k} \mathsf{P}^+(x_{i-1}, dx_i) \prod_{j=1}^{m} \mathsf{P}^+(y_{j-1} + x_k, dy_j + x_k)\, h_{x_k}(y_m + x_k) = \\
&\quad = I\{x_1 > x_k, \ldots, x_{k-1} > x_k\} \times \\
&\qquad \times \prod_{i=1}^{k} \mathsf{P}^+(x_{i-1}, dx_i)\, h_{x_k}(x_k) \prod_{j=1}^{m} \mathsf{P}^+(y_{j-1}, dy_j).
\end{aligned} \tag{19.19}$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}^+(y_{j-1} + x_k, dy_j + x_k) = \\
&\qquad = \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \mathsf{P}(y_{j-1} + x_k + X_1 \in dy_j + x_k) = \\
&\qquad = \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \mathsf{P}(y_{j-1} + X_1 \in dy_j) = \\
&\qquad = \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \frac{v(y_{j-1})}{v(y_j)} \mathsf{P}^+(y_{j-1}, dy_j)
\end{aligned}$$

и

$$h_{x_k}(y_m + x_k) \prod_{j=1}^{m} \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \frac{v(y_{j-1})}{v(y_j)} =$$

$$= \frac{v(y_m)}{v(y_m + x_k)} \prod_{j=1}^{m} \frac{v(y_j + x_k)}{v(y_{j-1} + x_k)} \frac{v(y_{j-1})}{v(y_j)} = \frac{1}{v(x_k)} = h_{x_k}(x_k).$$

Из соотношения (19.19) следует, что

$$\mathsf{P}^+(\nu = k, S_1 \in dx_1, \ldots, S_k \in dx_k, S_1^* \in dy_1, \ldots, S_m^* \in dy_m) =$$
$$= \mathsf{P}^+(\nu = k, S_1 \in dx_1, \ldots, S_k \in dx_k)\, \mathsf{P}^+(S_1^* \in dy_1, \ldots, S_m^* \in dy_m),$$

что означает справедливость утверждений 1) и 2) леммы.

Докажем утверждение 3):

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}^+(\nu = k, S_\nu \in dx) = \\
&\quad = \mathsf{P}^+(S_k \in dx, S_k - S_{k-1} < 0, \ldots, S_k - S_1 < 0)\, h_x(x) = \\
&\quad = \mathsf{P}(S_k \in dx, S_k - S_{k-1} < 0, \ldots, S_k - S_1 < 0) \times \\
&\qquad\quad \times v(x) I\{L_k \geqslant 0\} \frac{1}{v(x)} = \\
&\quad = \mathsf{P}(S_k \in dx, S_k - S_{k-1} < 0, \ldots, S_k - S_1 < 0) = \\
&\quad = \mathsf{P}(S_k \in dx, S_1 < 0, \ldots, S_{k-1} < 0) = \mathsf{P}\left(\tau_1' = k, S_{\tau_1'} \in dx\right)
\end{aligned}$$

(предпоследнее равенство получается переходом к двойственному случайному блужданию). Лемма доказана.

Замечание 19.1. В условиях доказанной леммы можно получить более сильный результат. Положим $\Pi_n^* = \Pi_{\nu+n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда P^+-п.н.

1) $(\Pi_0, \Pi_1, \ldots)$ и $(\Pi_0^*, \Pi_1^*, \ldots)$ независимы и одинаково распределены;

2) $(\nu, \Pi_0, \ldots, \Pi_{\nu-1})$ и $(\Pi_0^*, \Pi_1^*, \ldots)$ независимы.

Положим

$$\eta_n = \frac{\varphi''_{n-1}(1)}{\left(\varphi'_{n-1}(1)\right)^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что пары $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \ldots$ независимы и одинаково распределены относительно исходной меры P.

Пусть $\ln^+ x$ означает $\ln\bigl(\max(x, 1)\bigr)$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 19.4. *Пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *и при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{E}(\ln^+ \eta_1)^{2+\varepsilon} < +\infty. \tag{19.20}$$

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k+1}\, e^{-S_k} < +\infty$ P^+*-п.н.*

Доказательство. Введем последовательность моментов наступления перспективных минимумов случайной последовательности $\{S_n\}$: $\nu(0) = 0$, $\nu(1) = \nu$, $\nu(2) = \min\{m > \nu(1) \colon S_{m+n} \geqslant S_m$ для любого $n \in \mathbb{N}_0\}, \ldots$. В силу леммы 19.3 (если исходная мера P заменена на P^+) случайные величины $S_{\nu(1)}, S_{\nu(2)} - S_{\nu(1)}, \ldots$ независимы и одинаково распределены, причем (см. теорему 15.1) $0 < \mathsf{E}^+ S_{\nu(1)} < +\infty$. Поэтому, ввиду усиленного закона больших чисел, существует такая положительная постоянная c, что при всех достаточно больших j выполняется P^+-п.н. неравенство

$$S_{\nu(j)} \geqslant cj. \tag{19.21}$$

Кроме того, случайные величины $\nu(1), \nu(2) - \nu(1), \ldots$ также являются независимыми и одинаково распределенными, причем (см. теорему 15.2)

$$\mathsf{P}^+ \left(\nu_1 > n\right) = \mathsf{P}\left(\tau_1' > n\right) = O\left(1/\sqrt{n}\,\right), \qquad n \to +\infty,$$

поэтому

$$\mathsf{E}^+ \nu_1^{1/2-\delta} < +\infty$$

для любого $\delta \in (0, 1/2)$. Это означает, ввиду усиленного закона больших чисел для случая бесконечного математического ожидания (см. [5, гл. 9, § 3, теорема 13]), что P^+-п.н.

$$\begin{aligned} \nu(1) + (\nu(2) - \nu(1)) + \cdots + \big(\nu(j) - \nu(j+1)\big) = \\ = \nu(j) = O(j^{2+\delta}), \qquad j \to +\infty, \end{aligned} \tag{19.22}$$

для любого $\delta > 0$. По определению $\nu(j)$ при $k \geqslant \nu(j)$ выполняется неравенство $S_k \geqslant S_{\nu(j)}$. Откуда, учитывая (19.21), (19.22), получаем, что для любого $\delta \in (0, 1/2)$ можно подобрать такие положительные постоянные c_1, c_2, что при всех достаточно больших k выполняются P^+-п.н. неравенства

$$S_k \geqslant S_{\nu(\lfloor c_1 k^{1/2-\delta} \rfloor)} \geqslant c_2 k^{1/2-\delta}.$$

Следовательно, при $k \to +\infty$

$$e^{-S_k} = O\bigl(e^{-k^{1/2-\delta}}\bigr) \tag{19.23}$$

P^+-п.н. для любого $\delta \in (0, 1/2)$.

Далее, нетрудно проверить, что функция $v\,(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $v(x+y) \leqslant v(x)+v(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, поэтому, ввиду (19.13),

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^+\,(\eta_k > x) &= \mathsf{E}\,(v\,(S_k)\,; \eta_k > x, L_k \geqslant 0) \leqslant \\ &\leqslant \mathsf{E}\,(v\,(S_{k-1}) + v\,(X_k)\,; \eta_k > x, L_{k-1} \geqslant 0) = \\ &= \mathsf{E}\,(v\,(S_{k-1})\,; L_{k-1} \geqslant 0)\,\mathsf{P}\,(\eta_k > x) + \\ &\qquad + \mathsf{E}\,(v\,(X_k)\,; \eta_k > x)\,\mathsf{P}\,(L_{k-1} \geqslant 0) = \\ &= \mathsf{P}\,(\eta_1 > x) + \mathsf{E}\,(v(X_1); \eta_1 > x)\,\mathsf{P}\,(L_{k-1} \geqslant 0)\,. \end{aligned} \tag{19.24}$$

Из условия (19.20) по неравенству Чебышева находим, что при $x \to +\infty$

$$\mathsf{P}\,(\eta_1 > x) = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{2+\varepsilon}}\right). \tag{19.25}$$

Ввиду (19.11)

$$\mathsf{E}v(X_1)^{2-\delta} < +\infty$$

при любом $\delta > 0$. Откуда, снова учитывая условие (19.20), по неравенству Гельдера получаем при $\delta = \varepsilon/(3+2\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\bigl(v(X_1)(\ln^+\eta_1)^{1+\varepsilon/3}\bigr) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \bigl(\mathsf{E}(v(X_1)^{2-\delta})\bigr)^{\frac{1}{2-\delta}}\bigl(\mathsf{E}(\ln^+\eta_1)^{2+\varepsilon}\bigr)^{\frac{1+\varepsilon/3}{2+\varepsilon}} < +\infty. \end{aligned} \tag{19.26}$$

По неравенству Чебышева при $x > 1$

$$\mathsf{E}(v(X_1); \eta_1 > x) \leqslant \frac{1}{(\ln x)^{1+\varepsilon/3}}\mathsf{E}\bigl(v(X_1)(\ln^+\eta_1)^{1+\varepsilon/3}\bigr). \tag{19.27}$$

Из (19.26), (19.27) следует, что при $x \to +\infty$

$$\mathsf{E}\,(v(X_1); \eta_1 > x) = O\biggl(\frac{1}{(\ln x)^{1+\varepsilon/3}}\biggr). \tag{19.28}$$

Из (19.8), (19.24), (19.25) и (19.28) получаем, что при $x \to +\infty$

$$\mathsf{P}^+\,(\eta_k > x) = O\left(\frac{1}{(\ln x)^{2+\varepsilon}} + \frac{1}{(\ln x)^{1+\varepsilon/3}\sqrt{k}}\right).$$

Следовательно, для всех достаточно малых $\delta' > 0$ при $k \to \infty$

$$\mathsf{P}^+\bigl(\eta_k > e^{k^{1/2-\delta'}}\bigr) = O\bigl(k^{-(1/2-\delta')(2+\varepsilon)} + k^{-(1/2-\delta')(1+\varepsilon/3)-1/2}\bigr) = \\ = O\bigl(k^{-1-\varepsilon/7}\bigr).$$

По лемме Бореля–Кантелли находим, что для всех достаточно малых $\delta' > 0$ при $k \to \infty$ P^+-п.н.

$$\eta_k = O\bigl(e^{k^{1/2-\delta'}}\bigr).$$

Эта оценка вместе с оценкой (19.23) доказывает лемму.

Известно, что случайная последовательность $\{S_n\}$ при замене исходной вероятностной меры P на P^+ перестает быть случайным блужданием. Отсюда следует, что случайные последовательности $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$ перестают быть независимыми и одинаково распределенными. Будем называть среду $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$, рассматриваемую при мере P^+, *условной*. А вот ветвящийся процесс $\{\xi_n\}$ не перестает быть ветвящимся в условной среде $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$, т.е. выполняется основополагающее равенство (сравните с (19.1)): P^+-п.н.

$$\mathsf{E}^+\bigl(s^{\xi_n} \bigm| \Pi_0, \ldots, \Pi_{n-1}\bigr) = \varphi_0\left(\varphi_1\left(\ldots\varphi_{n-1}(s)\ldots\right)\right), \qquad (19.29)$$

$s \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, выражение справа измеримо относительно $\sigma\left(\Pi_0, \ldots, \Pi_{n-1}\right)$. Рассмотрим произвольное случайное событие B из этой σ-алгебры. Тогда

$$\mathsf{E}^+\left(s^{\xi_n}; B\right) = \mathsf{E}\left(s^{\xi_n} v(S_n) I\left\{L_n \geqslant 0\right\}; B\right) = \\ = \mathsf{E}\left[v(S_n) I\left\{L_n \geqslant 0\right\} I\left\{B\right\} \mathsf{E}\left(s^{\xi_n} \bigm| \Pi_0, \ldots, \Pi_{n-1}\right)\right] = \\ = \mathsf{E}\left[v(S_n) I\left\{L_n \geqslant 0\right\} I\left\{B\right\} \varphi_0\left(\varphi_1\left(\ldots\varphi_{n-1}(s)\ldots\right)\right)\right] = \\ = \mathsf{E}^+\left(\varphi_0\left(\varphi_1\left(\ldots\varphi_{n-1}(s)\ldots\right)\right); B\right),$$

что и доказывает (19.29).

Лемма 19.5. *При $s \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\varphi_0\left(\varphi_1\left(\ldots\varphi_{n-1}(s)\ldots\right)\right) \leqslant 1 - \left(\frac{e^{-S_n}}{1-s} + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{k+1}\, e^{-S_k}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}&\varphi_{k,n}(s)=\varphi_k\left(\varphi_{k+1}\left(\ldots\varphi_{n-1}(s)\ldots\right)\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1;\\&\varphi_{n,n}(s)=s.\end{aligned}$$

Тогда при $s\in[0,1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\varphi_{0,n}(s)}=\frac{a_0}{1-\varphi_{0,n}(s)}&=\\&=\frac{a_n}{1-\varphi_{n,n}(s)}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_k}{1-\varphi_{k,n}(s)}-\frac{a_{k+1}}{1-\varphi_{k+1,n}(s)}\right)=\\&=\frac{a_n}{1-s}+\sum_{k=0}^{n-1}a_k g_k\left(\varphi_{k+1,n}(s)\right),\end{aligned}$$

где

$$a_k=e^{-S_k},\qquad g_k(s)=\frac{1}{1-\varphi_k(s)}-\frac{1}{\varphi_k'(1)(1-s)},\qquad k\in\mathbb{N}_0.$$

Осталось заметить, что

$$0\leqslant g_k(s)\leqslant\eta_k,\quad s\in[0,1)\,,\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{19.30}$$

Чтобы показать (19.30), отбросим для простоты индекс k и воспользуемся тем, что функция $\varphi(s)$ выпукла вниз при $s\in[0,1)$:

$$\begin{aligned}\varphi'(1)g(s)\leqslant\varphi'(1)g(s)+\frac{s}{1-s}\left(1-\frac{\varphi'(s)(1-s)}{\varphi(1)-\varphi(s)}\right)&=\\=\frac{\varphi'(1)-s\varphi'(s)}{1-\varphi(s)}-1.&\end{aligned}\tag{19.31}$$

Далее (пусть $\varphi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$),

$$\frac{\varphi'(1)-s\varphi'(s)}{1-\varphi(s)}=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k(s),\tag{19.32}$$

где $r_k(s)=p_k\left(1-s^k\right)/\left(1-\varphi(s)\right)$. Заметим, что при $s\in[0,1)$

$$\frac{r_{k+1}(s)}{r_k(s)}=\frac{p_{k+1}}{p_k}\frac{1-s^{k+1}}{1-s^k}=\frac{p_{k+1}}{p_k}\left(1+\left(\sum_{j=1}^{k}s^{-j}\right)^{-1}\right).\tag{19.33}$$

Поскольку правая часть соотношения (19.33) возрастает по s и справедливо тождество $\sum_{k=0}^{\infty} r_k(s) = 1$, $s \in [0,1)$, то возрастает по s правая часть (19.32) и, следовательно, правая часть (19.31), поэтому

$$\varphi'(1)g(s) \leqslant \lim_{s\to 1}\left(\frac{\varphi'(1) - s\varphi'(s)}{1-\varphi(s)} - 1\right) = \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)}.$$

Соотношение (19.30) установлено. Лемма доказана.

Положим

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(\ldots\right) = \mathsf{P}^+\left(\ldots \mid \Pi_0, \Pi_1, \ldots\right).$$

Лемма 19.6. *Пусть выполнены условия леммы 19.4, тогда* P^+*-п.н.*

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(\xi_n > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}\right) > 0.$$

В частности,

$$\mathsf{P}^+\left(\xi_n > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}\right) > 0.$$

Более того, при $n \to \infty$ P^+*-п.н.*

$$\frac{\xi_n}{\exp S_n} \xrightarrow{D} V^+,$$

причем случайная величина V^+ *обладает свойством*: P^+*-п.н.*

$$\left\{V^+ > 0\right\} = \left\{\xi_n > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Доказательство. Ввиду (19.29) P^+-п.н.

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(\xi_n > 0\right) = 1 - \varphi_{0,n}(0).$$

Следовательно, по лемме 19.5 выполняется P^+-п.н. неравенство

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(\xi_n > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}\right) \geqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k+1}\, e^{-S_k}\right)^{-1}.$$

Но по лемме 19.4 правая часть положительна P^+-п.н. Итак, первое утверждение леммы доказано. Поскольку $\mathsf{P}^+\left(\ldots\right) = \mathsf{E}^+\widehat{\mathsf{P}^+}\left(\ldots\right)$, то второе утверждение вытекает из первого. Третье утверждение является следствием теоремы Дуба о сходимости мартингалов.

Приступим к доказательству последнего утверждения. Поскольку

$$\{\exists\, n \in \mathbb{N} \colon \xi_n = 0\} \subset \left\{V^+ = 0\right\},$$

то

$$\mathsf{P}^+\left(V^+ = 0\right) \geqslant \mathsf{P}^+\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \colon \xi_n = 0\right). \tag{19.34}$$

Покажем, что справедливо противоположное неравенство

$$\mathsf{P}^+\left(V^+ = 0\right) \leqslant \mathsf{P}^+\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \colon \xi_n = 0\right). \tag{19.35}$$

Сначала установим, что

$$\mathsf{P}^+\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \colon \xi_n = 0\right) + \mathsf{P}^+\left(\xi_n \to +\infty\right) = 1. \tag{19.36}$$

Для этого достаточно показать, что P^+-п.н.

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \colon \xi_n = 0\right) + \widehat{\mathsf{P}^+}\left(\xi_n \to +\infty\right) = 1. \tag{19.37}$$

В свою очередь, для выполнения соотношения (19.37) достаточно установить (вспомните свойства ветвящегося процесса в изменяющейся среде), что P^+-п.н.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - p_1^{(k)}\right) = +\infty. \tag{19.38}$$

Очевидно, $\mathsf{P}\left(p_1^{(i)} < 1\right) > 0$ при любом $i \in \mathbb{N}_0$, поскольку $\sigma^2 \neq 0$. Следовательно, $\mathsf{P}^+\left(p_1^{(i)} < 1\right) > 0$ при любом $i \in \mathbb{N}_0$. Откуда, учитывая, что по замечанию 19.1 случайная величина ν не зависит от случайной последовательности Π_ν, получаем, что

$$\mathsf{P}^+\left(p_1^{(\nu)} < 1\right) > 0.$$

По замечанию 19.1 случайные величины $p_1^{(\nu(k))}$, $k \in \mathbb{N}_0$, независимы и одинаково распределены. Отсюда следует, что P^+-п.н.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - p_1^{(k)}\right) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - p_1^{(\nu(k))}\right) = +\infty.$$

Итак, условие (19.38) выполнено, и, следовательно, справедливы соотношения (19.37) и (19.36).

Ввиду (19.29) и леммы 19.5, при $\lambda \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\widehat{\mathsf{E}^+}\left(\exp\left(-\lambda\xi_n/\exp S_n\right) \mid \xi_k = 1\right) = f_{k,n}\left(\exp\left(-\lambda e^{-S_n}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \left(\frac{e^{-(S_n - S_k)}}{1 - \exp(-\lambda e^{-S_n})} + \sum_{j=k}^{n-1} \eta_{j+1}\, e^{-(S_j - S_k)}\right)^{-1}$$

P^+-п.н. Поскольку $S_n \to +\infty$, $\xi_n/\exp S_n \to V^+$ при $n \to \infty$ P^+-п.н., то, устремляя сначала n, а затем λ к бесконечности, получаем, что P^+-п.н.

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(V^+ = 0 \mid \xi_k = 1\right) \leqslant 1 - \left(\sum_{j=k}^{\infty} \eta_{j+1}\, e^{-(S_j - S_k)}\right)^{-1}.$$

Поскольку момент $\nu(k)$ определяется только средой, то P^+-п.н.

$$\widehat{\mathsf{P}^+}\left(V^+ = 0 \mid \xi_{\nu(k)} = l\right) = \left(\widehat{\mathsf{P}^+}\left(V^+ = 0 \mid \xi_{\nu(k)} = 1\right)\right)^l.$$

Из последних двух соотношений находим, что P^+-п.н.

$$\widehat{\mathsf{P}^+}(V^+ = 0) = \widehat{\mathsf{E}^+}\left(\widehat{\mathsf{P}^+}\left(V^+ = 0 \mid \xi_{\nu(k)}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{\mathsf{E}^+}\left[1 - \left(\sum_{j=\nu(k)}^{\infty} \eta_{j+1}\, e^{-(S_j - S_{\nu(k)})}\right)^{-1}\right]^{\xi_{\nu(k)}} \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{\mathsf{P}^+}\left(\xi_{\nu(k)} \leqslant z\right) + \widehat{\mathsf{E}^+}\left[1 - \left(\sum_{j=\nu(k)}^{\infty} \eta_{j+1}\, e^{-(S_j - S_{\nu(k)})}\right)^{-1}\right]^z$$

для произвольного $z \in \mathbb{N}_0$. По замечанию 19.1 второй член правой части не зависит от k, поэтому

$$\mathsf{P}^+\left(V^+ = 0\right) \leqslant \mathsf{P}^+\left(\xi_{\nu(k)} \leqslant z\right) + \widehat{\mathsf{E}^+}\left[1 - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1}\, e^{-S_j}\right)^{-1}\right]^z.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая (19.36), находим, что

$$\mathsf{P}^+\left(V^+ = 0\right) \leqslant \mathsf{P}^+\left(\exists\, n \in \mathbb{N}\colon \xi_n = 0\right) + \widehat{\mathsf{E}^+}\left[1 - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1}\, e^{-S_j}\right)^{-1}\right]^z.$$

Устремляя теперь z к $+\infty$ и учитывая лемму 19.4, получаем (19.35). Из (19.34) и (19.35) следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Введем момент первого достижения минимума для последовательности $S_0, S_1, \ldots, S_n$:

$$\tau(n) = \min\{i \leqslant n\colon S_i = L_n\}.$$

Лемма 19.7. *Пусть $u(x)$, $x \geqslant 0$, является неотрицательной и невозрастающей числовой функцией, причем $\int_0^{+\infty} xu(x)\,dx < +\infty$. Если $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 := \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l \in \mathbb{N}$, что для всех $n > l$*

$$\sum_{k=l+1}^{n} \mathsf{E}\left(u\left(-S_k\right); \tau(k) = k\right) \mathsf{P}\left(L_{n-k} \geqslant 0\right) \leqslant \varepsilon \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right).$$

Доказательство. В случае, когда распределение X_1 является центрально решетчатым или нерешетчатым утверждение леммы элементарно следует из результатов лекции 16 (см. соотношение (16.26) и лемму 16.3). В общем случае доказательство предоставляется читателю.

Напомним, что

$$L_{k,n} = \min_{0 \leqslant i \leqslant n-k} \left(S_{k+i} - S_k\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Лемма 19.8. *Пусть случайные величины $V_1, V_2, \ldots$ равномерно ограничены и при всех $k \in \mathbb{N}_0$ и некотором $m \in \mathbb{N}_0$ P-п.н.*

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left(V_n; \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \,\middle|\, \mathfrak{F}_k\right) = \\ &\qquad = \left(V_k(m) + o(1)\right) \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right), \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{19.39}$$

где $V_k(m)$ является $\mathfrak{F}_k$-измеримой случайной величиной. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\left(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(V_k(m); \tau(k) = k\right) + o(1)\right) \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right),$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $0 \leqslant V_n \leqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Запишем для произвольного $l \in \mathbb{N}$ представление:

$$\mathsf{E}\left(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0\right) = I_1\left(n, l\right) + I_2\left(n, l\right), \tag{19.40}$$

где

$$I_1(n,l) = \sum_{k=0}^{l} \mathsf{E}\left(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k\right),$$

$$I_2(n,l) = \sum_{k=l+1}^{n} \mathsf{E}\left(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k\right).$$

Очевидно, при $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\{\tau(n) = k\} = \{\tau(k) = k\} \cap \{L_{n-k} \geqslant 0\}, \tag{19.41}$$

поэтому (см. (19.7))

$$\begin{aligned} I_2(n,l) \leqslant \sum_{k=l+1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_{\tau(n)} > 0, \tau(n) = k\right) = \\ = \sum_{k=l+1}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_k > 0, \tau(k) = k, L_{k,n} \geqslant 0\right) \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=l+1}^{n} \mathsf{E}\left(e^{S_k}; \tau(k) = k\right) \mathsf{P}\left(L_{n-k} \geqslant 0\right). \end{aligned} \tag{19.42}$$

Применение леммы 19.7 при $u(x) = \exp(-x)$, $x \geqslant 0$, дает

$$\lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{I_2(n,l)}{\mathsf{P}(L_n \geqslant 0)} = 0. \tag{19.43}$$

Далее, снова используя (19.41), запишем, что

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k\right) = \\ &\quad = \mathsf{E}\left(V_n; \xi_{k+m} > 0, \tau(k) = k, L_{k,n} \geqslant 0\right) = \\ &\quad = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(V_n; \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \,\middle|\, \mathfrak{F}_k\right); \tau(k) = k\right]. \end{aligned}$$

Заметим, что P-п.н.

$$\mathsf{E}\left(V_n; \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \,|\, \mathfrak{F}_k\right) \leqslant \mathsf{P}\left(L_{k,n} \geqslant 0 \,|\, \mathfrak{F}_k\right) = \mathsf{P}\left(L_{n-k} \geqslant 0\right),$$

что вместе с (19.39) дает возможность применить теорему о мажорируемой сходимости:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left(V_n; \xi_{\tau(n)+m} > 0, \tau(n) = k\right) / \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right) = \\ = \mathsf{E}\left(V_k(m); \tau(k) = k\right). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{I_1(n,l)}{\mathsf{P}(L_n\geqslant 0)}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(V_k(m);\tau(k)=k\right), \tag{19.44}$$

причем ряд справа абсолютно сходится, поскольку в силу леммы Фату и соотношения (19.42)

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\mathsf{E}\left(V_k(m);\tau(k)=k\right)\leqslant$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=l+1}^{n}\mathsf{E}\left(V_n;\xi_{\tau(n)+m}>0,\tau(n)=k\right)/\mathsf{P}\left(L_n\geqslant 0\right)\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=l+1}^{n}\mathsf{E}\left(e^{S_k};\tau(k)=k\right)\mathsf{P}\left(L_{n-k}\geqslant 0\right)/\mathsf{P}\left(L_n\geqslant 0\right),$$

а последний предел конечен ввиду леммы 19.7. Из соотношений (19.40), (19.43) и (19.44) следует утверждение леммы.

Замечание 19.2. Утверждение лемм 19.2, 19.6 и 19.8 справедливо не только в случае, когда $\xi_0=1$, но и тогда, когда ξ_0 является неотрицательной целочисленной случайной величиной, не зависящей от случайной среды (при этом случай, когда $\mathsf{P}(\xi_0=0)=1$, исключается).

Теорема 19.1. *Пусть* $\mathsf{E}X_1=0$, $\mathsf{E}X_1^2:=\sigma^2$, $0<\sigma^2<+\infty$, *и при некотором* $\varepsilon>0$ $\mathsf{E}\left(\ln^+\eta_1\right)^{2+\varepsilon}<+\infty$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\left(\xi_n>0\right)\sim\frac{c}{\sqrt{n}},$$

где c *– положительная постоянная.*

Доказательство. Будем писать P_z и P_z^+, если требуется подчеркнуть, что $\xi_0=z$, $z\in\mathbb{N}$. Положим

$$U_n=I\left\{\xi_n>0\right\},$$

тогда P^+-п.н.

$$\lim_{n\to\infty}U_n=I\left\{\xi_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

По лемме 19.2 при $z\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_z\left(\xi_n>0\,|\,L_n\geqslant 0\right)=\mathsf{P}_z^+\left(\xi_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}\right). \tag{19.45}$$

Положим
$$\psi(z,n) = P_z(\xi_n > 0, L_n \geqslant 0).$$
Тогда (19.45) означает, что при $n \to \infty$
$$\psi(z,n) \sim \mathsf{P}_z(L_n \geqslant 0)\,\mathsf{P}_z^+(\xi_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}).$$
Заметим, что P-п.н.
$$\mathsf{P}(\xi_n > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \,|\, \mathfrak{F}_k) = \psi(\xi_k, n-k).$$
Полагая
$$V_n = I\{\xi_n > 0\}, \quad m = 0, \quad V_k(0) = \mathsf{P}_{\xi_k}^+(\xi_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}),$$
видим, что условия леммы 19.8 выполнены, поэтому при $n \to \infty$
$$\mathsf{P}(\xi_n > 0) \sim c^* \mathsf{P}(L_n \geqslant 0), \tag{19.46}$$
где
$$c^* = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(\mathsf{P}_{\xi_k}^+(\xi_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}); \tau(k) = k\big) < +\infty. \tag{19.47}$$
Ясно, что $c^* > 0$, т.к. $\mathsf{P}_{\xi_0}^+(\xi_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}) > 0$ по лемме 19.6. Вспоминая соотношение (19.8), получаем утверждение теоремы.

Теорема 19.2. *В условиях теоремы 19.1 при $n \to \infty$*
$$\left\{ \frac{\xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\exp S_{\lfloor nt \rfloor}}, t \in (0,1] \,\middle|\, \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \{V(t), t \in (0,1]\}, \tag{19.48}$$
где $\{V(t)\}$ – процесс с постоянными положительными траекториями. Сходимость в (19.48) означает сходимость по распределению в пространстве $D[u,1]$ при любом $u \in (0,1)$.

Доказательство. Выберем произвольное $u \in (0,1)$. Положим при $t \in [u,1]$, $s \in \mathbb{R}$
$$Z_n(t) = \frac{\xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\exp S_{\lfloor nt \rfloor}}, \quad Z_n = \{\xi_n(t)\}, \quad V_s(t) = \frac{V^+}{\exp s}, \quad V_s = \{V_s(t)\},$$
где случайная величина V^+ та же, что и в лемме 19.6. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на $D[u,1]$. Положим
$$U_n = f\left(Z_n e^{-s}\right) I\{\xi_n > 0\}.$$

По лемме 19.6 при $n \to \infty$ последовательности $\{Z_n e^{-s}\}$ и $\{I\{\xi_n > 0\}\}$ сходятся P^+-п.н. соответственно к V_s и $I\{V^+ > 0\}$ в равномерной метрике (на $D[u,1]$) и, следовательно, в метрике Скорохода, поэтому P^+-п.н.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = f(V_s)\, I\left\{V^+ > 0\right\}.$$

По лемме 19.2 при $z \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{E}_z^+\big(f\left(Z_n\, e^{-s}\right) I\{\xi_n > 0\} \bigm| L_n \geqslant 0\big) = \mathsf{E}_z^+\left(f(V_s); V^+ > 0\right). \tag{19.49}$$

Положим

$$\psi(z,s,n) = \mathsf{E}_z\left(f\left(Z_n e^{-s}\right); \xi_n > 0, L_n \geqslant 0\right).$$

Тогда (19.49) означает, что при $n \to \infty$

$$\psi(z,s,n) \sim \mathsf{E}_z^+\left(f(V_s); V^+ > 0\right) \mathsf{P}(L_n \geqslant 0).$$

Заметим, что P-п.н.

$$\mathsf{E}\big(f(Z_n), \xi_n > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \bigm| \mathfrak{F}_k\big) = \psi(\xi_k, S_k, n-k).$$

Полагая

$$V_n = f(Z_n)\, I\{\xi_n > 0\}, \quad m = 0, \quad V_k(0) = \mathsf{E}_{\xi_k}^+\left(f(V_s); V^+ > 0\right),$$

видим, что условия леммы 19.8 выполнены, поэтому при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\left(f(\xi_n), \xi_n > 0\right) = \\ = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(\mathsf{E}_{\xi_k}^+\left(f(V_s); V^+ > 0\right); \tau(k) = k\right) + o(1)\right) \mathsf{P}(L_n \geqslant 0).$$

Откуда, ввиду (19.46),

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big(f(\xi_n) \bigm| \xi_n > 0\big) = \frac{1}{c^*} \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(\mathsf{E}_{\xi_k}^+(f(V_s); V^+ > 0); \tau(k) = k\big).$$

Правая часть равна

$$\int_{D[u,1]} f(w) \lambda(dw),$$

где λ – мера на пространстве $D\,[u,1]$, задаваемая формулами

$$\lambda(dw) = \frac{1}{c^*} \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(\lambda_{\xi_k, S_k}(dw)\,; \tau(k) = k\right),$$
$$\lambda_{z,s}(dw) = \mathsf{P}_z^+\left(V^s \in dw, V^+ > 0\right).$$

По лемме 19.6 полная масса меры $\lambda_{z,s}$ равна $\mathsf{P}_z^+\left(\xi_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\right)$, поэтому, ввиду (19.47), λ является вероятностной мерой. Меры $\lambda_{z,s}$ и, следовательно, мера λ сосредоточены на положительных постоянных функциях w. Теорема доказана.

Теорема 19.3. *В условиях теоремы 19.1 при $n \to \infty$*

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0,1] \;\middle|\; \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+,$$

где W^+ – броуновская извилина.

Доказательство. Сначала установим, что в условиях теоремы 19.1 при $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0,1] \;\middle|\; \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+. \tag{19.50}$$

Положим при $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$$Y_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad Y_{k,n}(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor \wedge k}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \widetilde{Y}_{k,n}(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor} - S_{\lfloor nt \rfloor \wedge k}}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Кратко эти процессы обозначим Y_n, $Y_{k,n}$, $\widetilde{Y}_{k,n}$ соответственно. Очевидно,

$$Y_n = Y_{k,n} + \widetilde{Y}_{k,n}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}_0$ и $k + m \leqslant n$. Рассмотрим произвольную непрерывную ограниченную числовую функцию φ, заданную на $D[0,1]$. Положим для $w \in D[0,1]$, $x \in [0, +\infty)$

$$\psi\,(w, x) = \mathsf{E}\big(\varphi(w + \widetilde{Y}_{k+m,n}); L_{k+m,n} \geqslant -x\big).$$

По принципу инвариантности Иглхарта (точнее, его модификации для случая, когда случайное блуждание выходит не из нуля, а из точки $x > 0$) для фиксированных k, m при $n \to \infty$

$$\left\{ \widetilde{Y}_{k+m,n} \;\middle|\; L_{k+m,n} \geqslant -x \right\} \xrightarrow{D} W^+,$$

где W^+ – броуновская извилина. Следовательно, если последовательность функций $w_n \in D[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится при $n \to \infty$ P-п.н. к нулевой функции, то

$$\psi(w_n, x) = \left(\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right) + o(1)\right) \mathsf{P}\left(L_{n-(k+m)} \geqslant -x\right) = \\ = \left(\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right) + o(1)\right) v(x) \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right),$$

причем последнее равенство объясняется соотношением (19.8). Поскольку

$$\{L_{k,n} \geqslant 0\} = \{L_{k,k+m} \geqslant 0\} \cap \{L_{k+m,n} \geqslant -(S_{k+m} - S_k)\} \quad (19.51)$$

и последовательность функций $Y_{k+m,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, равномерно сходится при $n \to \infty$ P-п.н. к нулевой функции, то

$$\mathsf{E}\big(\varphi(Y_n); \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \bigm| \mathfrak{F}_{k+m}\big) = \\ = \psi\left(Y_{k+m,n}, S_{k+m} - S_k\right) I\left\{\xi_{k+m} > 0, L_{k,k+m} \geqslant 0\right\} = \\ = \left(\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right) + o(1)\right) v\left(S_{k+m} - S_k\right) \times \\ \times I\left\{\xi_{k+m} > 0, L_{k,k+m} \geqslant 0\right\} \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right) \quad (19.52)$$

при $n \to \infty$ P-п.н. Из соотношений (19.9) и (19.51) следует, что P-п.н.

$$\left|\mathsf{E}\big(\varphi(Y_n); \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \bigm| \mathfrak{F}_{k+m}\big)\right| \leqslant \\ \leqslant \sup_{w \in D[0,1]} |\varphi(w)| \, \mathsf{P}\left(L_{k,n} \geqslant 0 \,|\, \mathfrak{F}_{k+m}\right) \leqslant \\ \leqslant \sup_{w \in D[0,1]} |\varphi(w)| \, \mathsf{P}\big(L_{k+m,n} \geqslant -(S_{k+m} - S_k) \bigm| \mathfrak{F}_{k+m}\big) \times \\ \times I\left\{L_{k,k+m} \geqslant 0\right\} \leqslant \\ \leqslant K_1 v\left(S_{k+m} - S_k\right) I\left\{L_{k,k+m} \geqslant 0\right\} \mathsf{P}\left(L_{n-(k+m)} \geqslant 0\right) \quad (19.53)$$

для некоторой положительной постоянной K_1. Ввиду (19.10)

$$\mathsf{E}\big(v\left(S_{k+m} - S_k\right); L_{k,k+m} \geqslant 0 \bigm| \mathfrak{F}_k\big) = v(0) = 1. \quad (19.54)$$

Из соотношения (19.52), учитывая (19.53) и (19.54), по теореме о мажорируемой сходимости под знаком условных математических ожиданий получаем, что при $n \to \infty$ P-п.н.

$$\mathsf{E}\big(\varphi(Y_n); \xi_{k+m} > 0, L_{k,n} \geqslant 0 \bigm| \mathfrak{F}_k\big) = \left(\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right) + o(1)\right) \times \\ \times \mathsf{E}\big(v\left(S_{k+m} - S_k\right); \xi_{k+m} > 0, L_{k,k+m} \geqslant 0 \bigm| \mathfrak{F}_k\big) \mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right) =$$

$$= \big(\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right) + o(1)\big)\,\mathsf{P}^+_{\xi_k}\left(\xi_m > 0\right)\mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right), \tag{19.55}$$

причем последнее равенство объясняется соотношением (19.13).

Положим $V_n = \varphi(Y_n)$. По лемме 19.8, ввиду (19.55), при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\left(\varphi\left(Y_n\right); \xi_{\tau_n+m} > 0\right) = \\ = \left(\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right)\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\big(\mathsf{P}^+_{\xi_k}(\xi_m > 0); \tau_k = k\big) + o(1)\right)\mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right),$$

причем ряд в правой части сходится. В частности, при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\xi_{\tau_n+m} > 0\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\big(\mathsf{P}^+_{\xi_k}(\xi_m > 0); \tau_k = k\big) + o(1)\right)\mathsf{P}\left(L_n \geqslant 0\right).$$

Теперь заметим, что

$$\big|\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right)\mathsf{P}\left(\xi_n > 0\right) - \mathsf{E}\left(\varphi\left(Y_n\right); \xi_n > 0\right)\big| \leqslant \\ \leqslant \big|\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right)\mathsf{P}\left(\xi_n > 0\right) - \mathsf{E}\left(\varphi\left(Y_n\right); \xi_{\tau_n+m} > 0\right)\big| + \\ + \sup_{w \in D[0,1]}|\varphi(w)|\,\mathsf{E}\left|I\left\{\xi_n > 0\right\} - I\left\{\xi_{\tau_n+m} > 0\right\}\right|$$

и

$$\mathsf{E}\left|I\left\{\xi_n > 0\right\} - I\left\{\xi_{\tau_n+m} > 0\right\}\right| \leqslant \\ \leqslant \big(\mathsf{P}(\xi_n > 0) - \mathsf{P}(\xi_{n+m} > 0)\big) + \\ + \big(\mathsf{P}(\xi_{\tau_n+m} > 0) - \mathsf{P}(\xi_{n+m} > 0)\big).$$

Откуда, учитывая теорему 19.1, находим, что

$$\big|\mathsf{E}\varphi\left(W^+\right) - \mathsf{E}\big(\varphi\left(Y_n\right) \bigm| \xi_n > 0\big)\big| \leqslant \\ \leqslant 2\sup_{w \in D[0,1]}|\varphi(w)|\left|\frac{1}{c^*}\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\big(\mathsf{P}^+_{\xi_k}(\xi_m > 0); \tau_k = k\big) - 1\right| + o(1). \tag{19.56}$$

По теореме о монотонной сходимости и соотношению (19.47) при $m \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{E}\big(\mathsf{P}^+_{\xi_k}(\xi_m > 0); \tau_k = k\big) \to c^*.$$

Откуда, переходя к пределу в (19.56) при $m \to \infty$, получаем требуемое утверждение (19.50).

Из теоремы 19.2 следует, что при $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\ln Z_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in (0,1] \;\middle|\; \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} 0. \qquad (19.57)$$

Положим при $t \in [0,1]$ и n таких, что $\xi_n > 0$,

$$Y_n^*(t) = \frac{\ln \xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}.$$

В качестве следствия соотношений (19.50) и (19.57) находим, что при $n \to \infty$

$$\left\{ Y_n^*(t), t \in (0,1] \;\middle|\; \xi_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+.$$

Чтобы теперь получить утверждение теоремы (т.е. вместо ситуации, когда $t \in (0,1]$, рассмотреть ситуацию, когда $t \in [0,1]$) достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \downarrow 0} \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\big(w_{Y_n^*}(\delta; 0, u) \geqslant \varepsilon \;\big|\; \xi_n > 0 \big) = 0. \qquad (19.58)$$

Заметим, что при $u \in (0,1)$ и n таких, что $\xi_n > 0$,

$$w_{Y_n^*}(\delta; 0, u) \leqslant \sup_{t \in [0,u]} Y_n^*(t) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t \in [0,u]} Y_n(t) + \Big(\ln \sup_{t \in [0,u]} Z_n(t) \Big) \Big/ (\sigma\sqrt{n}\,). \qquad (19.59)$$

Используя соотношение (19.50) и непрерывность траекторий броуновской извилины, находим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \downarrow 0} \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,u]} Y_n(t) > \varepsilon \;\middle|\; \xi_n > 0 \right) =$$
$$= \lim_{u \downarrow 0} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,u]} W^+(t) > \varepsilon \right) = 0. \qquad (19.60)$$

Случайная последовательность $\{\xi_n / \exp S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является мартингалом, поэтому по неравенству Дуба получаем, что при $u \in (0,1)$ для произвольного положительного ε

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,u]} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \ln Z_n(t) > \varepsilon \;\middle|\; \xi_n > 0 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mathsf{P}(\xi_n > 0)} \mathsf{P}\left(\sup_{i \leqslant n} \frac{\xi_i}{\exp S_i} > e^{\varepsilon\sigma\sqrt{n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{-\varepsilon\sigma\sqrt{n}}}{\mathsf{P}(\xi_n > 0)} \to 0, \qquad n \to \infty \tag{19.61}$$

(здесь использована теорема 19.1). Из (19.59)–(19.61) следуют соотношение (19.58) и утверждение теоремы.

Замечание 19.3. Обобщение представленной здесь теории критических ВПСС на случай, когда сопровождающее случайное блуждание является осциллирующим, изложено в работе [13].

В заключение скажем несколько слов о докритических ВПСС. Они подразделяются на *умеренно докритические*, *промежуточно докритические* и *строго докритические* в зависимости от того, положительно, равно нулю или отрицательно математическое ожидание $\mathsf{E}(\varphi_0'(1)\ln\varphi_0'(1))$. Оказывается, что если выполнены некоторые дополнительные условия, то при $n \to \infty$

1) в умеренно докритическом случае

$$\left\{\frac{\ln \xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma^{(\tau)}\sqrt{n}}, t \in [0,1] \,\middle|\, \xi_n > 0\right\} \xrightarrow{D} W_0^+,$$

где W_0^+ – броуновская экскурсия, положительная постоянная $\sigma^{(\tau)}$ определена в лекции 17 (см. доказательство теоремы 17.2);

2) в промежуточно докритическом случае

$$\left\{\frac{\ln \xi_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma^{*}\sqrt{n}}, t \in [0,1] \,\middle|\, \xi_n > 0\right\} \xrightarrow{D} W_0,$$

где W_0 – броуновский мост, $\sigma^* = \left(\mathsf{E}\left(\varphi_0'(1)\ln^2\varphi_0'(1)\right)/\mathsf{E}\varphi_0'(1)\right)^{1/2}$;

3) в строго докритическом случае конечномерные распределения случайного процесса $\left\{\xi_{\lfloor nt \rfloor}, t \in (0,1) \,\middle|\, \xi_n > 0\right\}$ сходятся к соответствующим распределениям некоторого положительного случайного процесса, у которого все сечения независимы и одинаково распределены.

С этими и близкими к ним результатами можно ознакомиться по работам [11], [14], [19].

Список литературы

Учебники и монографии

[1] Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.

[2] Боровков А. А., *Теория вероятностей*, Эдиториал УРСС, М., 1999.

[3] Булинский А. В., Ширяев А. Н., *Теория случайных процессов*, Физматлит; Лаборатория базовых знаний, М., 2003.

[4] Ито К., Маккин Г., *Диффузионные процессы и их траектории*, Мир, М., 1968.

[5] Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972.

[6] Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.

[7] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, 2, Мир, М., 1984.

[8] Харрис Т., *Теория ветвящихся случайных процессов*, Мир, М., 1966.

[9] Ширяев А. Н., *Вероятность*, Наука, М., 1989.

[10] Athreya K. B., Ney P. E., *Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

Научные статьи

[11] Афанасьев В. И., “Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде”, *Дискретная математика*, **13**:1 (2001), 132–157.

[12] Эппель М. С., “Локальная предельная теорема для момента первого перескока”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:1 (1979), 181–191.

[13] Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., “Criticality for branching processes in random environment”, *Ann. Probab.*, **33**:2 (2005), 645–673.

[14] Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., “Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment”, *Stochastic Processes and their Applications*, **115**:10 (2005), 1658–1676.

[15] Bolthausen E., “On a functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive”, *Ann. Probab.*, **4**:3 (1976), 480–485.

[16] Durrett R. T., “Conditioned limit theorems for some null recurrent Marcov processes”, *Ann. Probab.*, **6**:5 (1978), 798–828.

[17] Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., “Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion”, *Ann. Probab.*, **5**:1 (1977), 117–129.

[18] Feller W., "Diffusion processes in genetics", *Proc. 2nd Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, 1951, 227–246.

[19] Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., "Limit theorems for subcritical branching processes in random environment", *Ann. Inst. Henri Poincare, Probab. Stat.*, **39**:4 (2003), 593–620.

[20] Iglehart D. L., "Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive", *Ann. Probab.*, **2**:4 (1974), 608–619.

[21] Lamperti J., Ney P., "Conditioned branching processes and their limiting diffusions", *Теория вероятностей и ее применения*, **13**:1 (1968), 126–137.

[22] Liggett T. M., "An invariance principle for conditioned sums of independent random variables", *J. Math. Mech.*, **18** (1968), 559–570.

[23] Lindvall T., "Convergence of critical Galton–Watson branching processes", *J. Appl. Probab.*, **9** (1972), 445–450.

[24] Lindvall T., "Almost sure convergence of branching processes in varying and random environments", *Ann. Probab.*, **2**:2 (1974), 344–346.

[25] Stone C. J., "A local limit theorem for nonlattice multidimensional distribution functions", *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 546–551.

[26] Tanaka H., "Time reversal of random walks in one dimension", *Tokyo J. Math.*, **12** (1989), 159–174.